This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

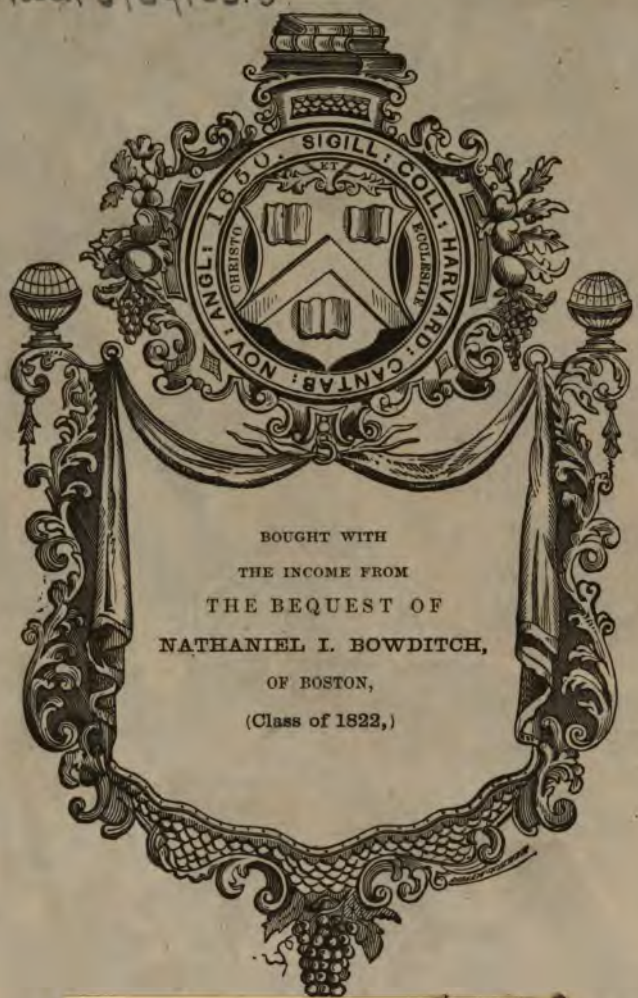
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 3709.03.5



BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)

SCIENCE CENTER LIBRARY

MÉMOIRE

SUR UNE CLASSE

DE

QUADRATURES DE FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR RAPPORT A LEUR MODULE

PAR

M. le V^te^ de SALVERT

DOCTEUR ÈS-SCIENCES

PROFESSEUR A LA FACULTÉ LIBRE DES SCIENCES DE LILLE

BRUXELLES

POLLEUNIS ET CEUTERICK, IMPRIMEURS

37, RUE DES URSULINES, 37

1903

Math 3709.03.5

HARVARD COLLEGE
JUL 6 1905
LIBRARY.
Bowditch Fund

Extrait des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES
(T. XXVII, 2e Partie)

ERRATA

Page 1, ligne 1 de la note, *au lieu de* solide à surfaces courbes, *lire* solide à six faces courbes.

Page 3, ligne 11, *au lieu de* partie intégrale, *lire* partie intégrante.

Page 9, ligne 13 du texte, *au lieu de* ϖ, s, t, s_1, t_1, *lire* ϖ, s_1, t_1, s_2, t_2.

Page 10, équation (10^{bis}) au dénominateur, sous le signe intégral, *au lieu de* $1 - k^2 \operatorname{sn}^2 h \operatorname{dn}^2 \varphi$, *lire* $1 - k^2 \operatorname{sn}^2 h \operatorname{sn}^2 \varphi$.

Page 18, équation sans numéro, qui occupe le milieu de la page, au second terme du premier membre, *au lieu de*

$$-\int_g^k \mathrm{F}_1\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}}, \quad \textit{lire} \quad -\int_g^k \left(\frac{x}{k}, k\right) \mathrm{F}_1\,(g^2 - k^2)\, \frac{2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}}.$$

Page 19, équation (27), au second terme du premier membre,

au lieu de $$-\int_g^k \mathrm{F}_1\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{2k\,dk}{\sqrt{(g^2 - k^2)\,(g'^2 + k^2)}},$$

lire $$-\int_g^k \mathrm{F}_1\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{(g^2 - k^2)\,2k\,dk}{\sqrt{(g^2 - k^2)\,(g'^2 + k^2)}}.$$

Page 28, équations (41), *au lieu de* $\mathrm{N} = \varpi + n^2 - \epsilon$,

lire $\mathrm{N} = \varpi + n^2 + \epsilon$.

Page 28, dernière ligne des équations sans numéro entre (42) et (43),

au lieu de $$= \frac{1}{\mathrm{N}}\,[(\varpi + \epsilon - \theta) - (\varpi + \theta)] =$$

lire $$= \frac{1}{\mathrm{N}}\,[(\varpi + n^2 + \epsilon) - (\varpi + \theta)] = .$$

Page 66, Tableau B, dernière ligne de l'équation (IV), au premier terme dans les crochets, *au lieu de* $(1 - k_2)\,\varphi_1$, *lire* $(1 - k^2)\,\varphi_1$.

Page 67, équation (145), ligne 3, au 1er terme dans la parenthèse, *au lieu de* $f_2\,(x^2)$, *lire* $f_2\,(k^2)$.

Page 69, équations (151), au 1er terme dans la parenthèse de la seconde équation, *au lieu de* $f_1(k^2)$, *lire* $f_2(k^2)$.

Page 71, avant-dernière équation (sans numéro), dernier terme du second membre,

au lieu de $-\frac{\mathfrak{F}_2(x^2, -g'^2)}{k^2+g'^2}$, *lire* $+\frac{\mathfrak{F}_2(x^2, -g'^2)}{k^2+g'^2}$.

Page 75, équation sans numéro, au dernier terme, *au lieu de* $\mathfrak{F}_2(x^2, k^2)$, *lire* $\mathfrak{F}_2(x^2, -g'^2)$.

Page 76, équations (174), au second membre, pour le dénominateur du premier terme dans les crochets, *au lieu de* $\sqrt{k^2-x}$, *lire* $\sqrt{k^2-x^2}$.

Page 78, équations (177), dernier terme dans les crochets des avant-dernière et dernière lignes,

au lieu de $2U''\frac{\delta P''}{\delta . x^2}$, *lire* $2\frac{U''}{x^2-1}\frac{\delta P''}{\delta . x^2}$.

Page 109, ligne 4 du texte, *au lieu de* l'égalité (108), *lire* l'égalité (112).

Page 122, ligne 2 du texte, *au lieu de* interprétations (5), *lire* interprétations (8).

Page 131, dernière ligne de l'équation (J^n), *au lieu du facteur* $\sqrt{g'^2-k^2}$, *lire* $\sqrt{g'^2+k^2}$.

MÉMOIRE

SUR UNE CLASSE

DE

QUADRATURES DE FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR RAPPORT A LEUR MODULE

La notion des intégrales elliptiques envisagées comme fonctions de leur module joue, comme on le sait, un rôle considérable dans l'Analyse. Aussi tous les traités complets de cette Science rapportent-ils, dans cet ordre d'idées, plusieurs formules importantes déduites de la différentiation de ces fonctions par rapport à leur module. Mais par contre, sinon tous, du moins les plus répandus, ne font mention d'aucune formule explicite qui provienne de l'intégration des mêmes fonctions par rapport à ce module.

Or, la connaissance exacte de l'expression des composantes de l'Attraction, sur un point quelconque, du Solide que, par une métaphore expressive ayant pour but et pour excuse d'abréger le langage, nous avons appelé *Parallélipipède Ellipsoïdal* (*), se

---

(*) Nous voulons dire le Solide à surfaces courbes délimité par trois couples de surfaces homofocales appartenant tous trois à un même Système Ellipsoïdal.

ramène à la détermination de certaines intégrales doubles que l'on peut interpréter comme les quadratures, par rapport à leur module, du produit d'intégrales elliptiques de première et de deuxième espèces par certaines fonctions algébriques très simples de ce module, ainsi qu'on peut le constater déjà à propos du cas particulier intéressant traité dans le premier Chapitre de notre *Mémoire sur l'Attraction du Parallélipipède Ellipsoïdal* (*).

Cela étant, ayant entrepris l'étude de ce problème difficile de Mécanique, nous nous sommes trouvé contraint, en présence du silence des traités d'Analyse à notre connaissance sur toute question de l'ordre que nous venons de dire, à imaginer et créer de toutes pièces une méthode rationnelle pour la détermination de la classe de quadratures du genre sus-indiqué qui s'imposait ainsi à notre attention, et nous avons été assez heureux, après de longs efforts, pour arriver à des résultats très nets et très précis à ce sujet.

Nous croyons donc intéressant d'exposer ici à part, dans ce nouveau Mémoire, à titre de problème d'Analyse pure, la série des déductions assez laborieuses qui nous ont amené définitivement à ces résultats, c'est-à-dire comme conclusion, à la forme explicite de l'expression des quadratures en question.

Comme la route que nous aurons à parcourir pour y arriver sera longue et hérissée de nombreux obstacles, nous avons cru devoir, pour faciliter l'intelligence de l'exposition, la fractionner en six étapes (ou paragraphes) successives, dont nous résumerons pour chacune le résultat acquis, en le formulant par l'énoncé d'une proposition ou Théorème d'Analyse, lesquels Théorèmes formeront comme l'ossature ou la synthèse de notre théorie, en sorte qu'une fois la lecture achevée, leur simple récapitulation permettra très aisément à l'esprit du Lecteur de se remémorer et d'embrasser d'un seul coup d'œil tout l'ensemble du chemin parcouru.

Une dernière observation en terminant cette Introduction.

(*) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, T. XXI (1897), 2e Partie, pp. 131-250.

Comme le point de départ de cette recherche, de même que la question elle-même, est emprunté au premier chapitre de notre Mémoire précité sur l'*Attraction du Parallélipipède Ellipsoïdal,* nous nous trouverons dans l'obligation de faire de très fréquents emprunts ou renvois au premier Chapitre en question et, dès lors, pour éviter au Lecteur la répétition incessante de la même désignation, fastidieuse par sa fréquence autant que par sa longueur, il sera entendu une fois pour toutes que cette locution : " notre Chapitre I „ signifiera le Chapitre I du susdit *Mémoire sur l'Attraction du Parallélipipède Ellipsoïdal,* dont le présent travail était, à vrai dire, destiné primitivement à faire partie intégrale si nous ne nous étions pas trouvé contraint par la complication et la difficulté de la question à lui donner une pareille étendue.

I

Nous avons déterminé dans le dit Chapitre I, par le moyen d'un changement de variables, l'expression explicite des intégrales doubles que nous désignions par le symbole $I^{(\varpi)}$ défini par l'équation (28) de ce Chapitre, après avoir fait remarquer, pour légitimer ce changement de variables (pp. 30-31), que si l'on n'a pas recours à ce moyen, les dites quantités se présentent en l'état sous l'aspect d'une combinaison linéaire d'intégrales, par rapport au module, du produit de fonctions elliptiques de première et de deuxième espèces par certaines fonctions algébriques très simples de ce module.

Or, comme nous avons ainsi obtenu dans ce même chapitre, pour les mêmes quantités $I^{(\varpi)}$, une expression remarquable [formule (86)] constituée par la somme algébrique de huit fonctions elliptiques de troisième espèce, dont l'argument, le paramètre et le module étaient pour chacune une certaine fonction rationnelle très simple (à numérateur et dénominateur linéaires) des variables proposées, ou plus exactement de leurs limites données, il suit donc du rapprochement de ces deux faits que, bien que chacune des intégrales spécifiées tout à l'heure, dont l'introduction s'imposait ainsi dans l'expression des quantités précitées $I^{(\varpi)}$, paraisse appartenir isolément à une catégorie analytique beaucoup plus compliquée et sur laquelle les divers traités d'Analyse ne fournissent aucune indication, néanmoins certaine combinaison linéaire de semblables fonctions se réduit à une somme de fonctions elliptiques répondant aux conditions que nous avons dites : absolument de même que pour les fonctions elliptiques de deuxième ou de troisième espèce, leurs formules d'addition nous montrent qu'une somme algébrique de semblables fonctions de certains arguments s'exprime, dans le premier cas, par un produit

de fonctions elliptiques de première espèce de ces arguments, et dans le second par le logarithme d'une fraction rationnelle de fonctions de première espèce des dits arguments, c'est-à-dire par conséquent dans l'un et l'autre cas par des fonctions plus simples (*) que les fonctions envisagées elles-mêmes (**).

Le résultat emprunté au Mémoire précité fait donc ainsi ressortir, à propos de ces fonctions inétudiées jusqu'ici, comme un nouveau cas d'une sorte de fait analytique de caractère plus général qu'il nous a semblé intéressant de mettre en lumière à propos de toute une classe d'intégrales semblables (nous voulons dire encore de quadratures, par rapport au module, du produit de fonctions elliptiques par certaines fonctions algébriques très simples de ce module), en montrant que l'on pourra former une infinité de combinaisons linéaires déterminées de telles intégrales qui s'exprimeront à l'aide de combinaisons linéaires de fonctions elliptiques dont nous déterminerons tous les éléments (module, argument et paramètre), et de fonctions algébriques dont nous mettrons en évidence toutes les irrationalités.

Cette propriété des dites intégrales ainsi établie nous fournira alors, comme on le verra, d'une façon toute naturelle, leur expression générale, simplement au moyen des fonctions elliptiques de deux seuls modules ou arguments nouveaux et d'un terme algé-

---

(*) Ce mot *simple* vise ici, dans notre pensée, l'ordre dans lequel les diverses fonctions transcendantes sont successivement engendrées par le Calcul Intégral, les divers degrés de complication croissante correspondant ainsi, le premier aux fonctions circulaires, arcs de cercle, exponentielles et logarithmes; le second aux fonctions elliptiques; le troisième aux fonctions hyperelliptiques; le quatrième aux fonctions abéliennes, etc.

(**) Les formules d'addition que nous rappelons sont, comme on le sait, les suivantes

$$\begin{cases} Z(\varphi+\psi) - Z(\varphi) - Z(\psi) = k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}(\varphi+\psi), \\ \Pi(\varphi+\psi, h) - \Pi(\varphi, h) - \Pi(\psi, h) = \frac{1}{4} \log \frac{MN}{PQ}, \end{cases}$$

les symboles M, N, P, Q tenant lieu des quatre expressions :

$$M = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi - h) \operatorname{sn}^2\psi, \qquad N = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\varphi \operatorname{sn}^2(\psi - h),$$
$$P = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi + h) \operatorname{sn}^2\psi, \qquad Q = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\varphi \operatorname{sn}^2(\psi + h).$$

brique proportionnel à un seul et même radical pour toutes, l'autre facteur étant une fonction entière du module et de l'argument primitifs, nous voulons dire ceux qui figurent dans l'élément des intégrales considérées elles-mêmes.

La première chose à faire pour atteindre le but que nous venons d'indiquer consiste évidemment, en considérant d'abord le fait sus-mentionné qui doit ressortir de la façon spécifiée tout à l'heure des résultats établis dans le Mémoire précité, à dégager l'égalité qui l'exprimera des notations spéciales à la question de Mécanique qui nous a procuré ces résultats, de manière à présenter alors la dite égalité comme une formule générale (ou théorème) d'Analyse ayant intrinsèquement sa signification et son intérêt propres, complètement indépendants dès lors du problème spécial d'Attraction qui nous l'aura révélée.

Pour cela, nous reportant à la définition ci-dessus rappelée des intégrales doubles $I^{(\varpi)}$ précitées [formule (28) du Chap. I], nous commencerons par substituer, respectivement à la constante ϖ et aux deux variables s et t, les constantes complémentaires g^2 ou g'^2 et les variables x et k définies séparément par les équations

$$(1)\quad g^2 + g'^2 = 1, \quad g'^2 = 1 - g^2, \quad \varpi = m^2 g'^2 = m^2 (1 - g^2),$$

$$(2)\qquad s = l^2 + m^2 x^2, \qquad t + \varpi + n^2 = - m^2 k^2,$$

ou bien, quant à la seconde variable, en tenant compte de la relation fondamentale (5),

$$(2^{bis})\quad \begin{cases} t = - (\varpi + n^2 + m^2 k^2) = - [m^2 (1 - g^2) + n^2 + m^2 k^2] \\ \quad = - (l^2 + m^2 + n^2) + [l^2 + m^2 (g^2 - k^2)] = l^2 + m^2 (g^2 - k^2), \end{cases}$$

en convenant en même temps de faire correspondre aux valeurs initiales s_1 et t_1 et aux valeurs finales s_2 et t_2 de s et t, respectivement les valeurs initiales 0 et g, et les valeurs finales x et k elles-mêmes pour x et k, de telle sorte que l'on aura alors à la fois :

$$(2^{ter})\qquad s_1 = l^2, \qquad t_1 = l^2, \qquad \text{et} \qquad s_2 = s, \qquad t_2 = t.$$

Cela posé, l'ensemble de ces définitions, jointes à celles des symboles f, S et T [formules (14) et (29) du Chap. I], donnant sans

peine, en tenant compte de nouveau de la relation fondamentale (5) $l^2 + m^2 + n^2 = 0$, successivement les valeurs

$$
(3)\quad \left\{\begin{array}{l}
ds = m^2.\,2x\,dx, \qquad dt = -\,m^2.\,2k\,dk,\\
s - t = (l^2 + m^2x^2) - [l^2 + m^2(g^2 - k^2)] = m^2(x^2 + k^2 - g^2),\\
l^2 - s = -\,m^2x^2,\\
n^2 + s = n^2 + (l^2 + m^2x^2) = -\,m^2 + m^2x^2 = -\,m^2(1 - x^2),\\
s + t + \varpi - f = s + t + \varpi - (l^2 - n^2)\\
\qquad\qquad = (t + \varpi + n^2) - (l^2 - s)\\
\qquad\qquad = -\,m^2k^2 + m^2x^2 = -\,m^2(k^2 - x^2),\\
\mathrm{S} = (l^2 - s)(n^2 + s) = -\,m^2x^2[-\,m^2(1 - x^2)] = m^4x^2(1 - x^2),\\
n^2 + t = -\,\varpi - m^2k^2 = -\,m^2g'^2 - m^2k^2 = -\,m^2(g'^2 + k^2),\\
l^2 - t = l^2 - [l^2 + m^2(g^2 - k^2)] = -\,m^2(g^2 - k^2),\\
\mathrm{T} = (l^2 - t)(n^2 + t) = -\,m^2(g^2 - k^2)[-\,m^2(g'^2 + k^2)]\\
\qquad = m^4(g^2 - k^2)(g'^2 + k^2),\\
\dfrac{ds}{\sqrt{\mathrm{S}}} = \dfrac{m^2.\,2x\,dx}{m^2x\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}},\\
\dfrac{dt}{\sqrt{\mathrm{T}}} = \dfrac{-\,m^2.\,2k\,dk}{m^2\sqrt{(g^2 - k^2)(g'^2 + k^2)}} = \dfrac{-\,2k\,dk}{\sqrt{(g^2 - k^2)(g'^2 + k^2)}},
\end{array}\right.
$$

si nous convenons dès maintenant pour toute l'étendue de ce Mémoire, d'introduire les deux notations abrégées

$$
(4)\qquad \mathrm{X} = (1 - x^2)(k^2 - x^2), \qquad \mathrm{K} = (g^2 - k^2)(g'^2 + k^2),
$$

l'élément de l'intégrale double en question $\mathrm{I}^{(\varpi)}$, que nous y désignerons simplement par le symbole I, deviendra, étant exprimé à l'aide des nouvelles constantes g et g' et des nouvelles variables x et k,

$$
(5)\quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{1}{4}\,\dfrac{s - t}{\sqrt{s + t + \varpi - f}}\,\dfrac{ds}{\sqrt{\mathrm{S}}}\,\dfrac{dt}{\sqrt{\mathrm{T}}}\\
= \dfrac{1}{4}\,\dfrac{m^2(x^2 + k^2 - g^2)}{im\sqrt{k^2 - x^2}}\,\dfrac{2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}\,\dfrac{-\,2k\,dk}{\sqrt{(g^2 - k^2)(g'^2 + k^2)}}\\
= im(x^2 + k^2 - g^2)\,\dfrac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}\,\dfrac{k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}},
\end{array}\right.
$$

et dès lors cette intégrale double elle-même, dans l'élément de laquelle nous supposons expressément les deux radicaux pris avec la détermination positive, ainsi que tous ceux que nous envisagerons par la suite, pourra s'écrire à l'aide de ces symboles

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{I} = \mathrm{I}^{(\varpi)} = \displaystyle\int_g^k \int_0^x im\,(x^2 + k^2 - g^2)\,\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}\,\frac{k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}} \\ \quad = im\left[\displaystyle\int_g^k \left(\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}\right)\frac{k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}} - \int_g^k \left(\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}\right)(g^2 - k^2)\,\frac{k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}}\right]. \end{array}\right.$$

Or, si maintenant nous convenons de nouveau de représenter respectivement par les symboles $\mathrm{F}_1(z, k)$ et $\mathrm{F}_2(z, k)$, quelque signification que l'on attribue d'ailleurs à k, les deux intégrales elliptiques *normales* (*) de première et de deuxième espèces, c'est-à-dire les fonctions

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{F}_1(z, k) = \displaystyle\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)\,(1 - k^2 z^2)}}, \\ \mathrm{F}_2(z, k) = \displaystyle\int_0^z \frac{k^2 z^2\,dz}{\sqrt{(1 - z^2)\,(1 - k^2 z^2)}}, \end{array}\right.$$

comme, en faisant $z = \frac{x}{k}$ ou $kz = x$, l'on aura par ces définitions et les précédentes (4)

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2z^2)}} = \frac{\frac{dx}{k}}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)(1-x^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(k^2-x^2)\,(1-x^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}},$$

$$(8)\qquad \mathrm{F}_1\left(\frac{x}{k}, k\right) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}, \qquad \mathrm{F}_2\left(\frac{x}{k}, k\right) = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\mathrm{X}}},$$

(*) Nous désignons par cette appellation d'*intégrales elliptiques normales de première et de deuxième espèces,* d'une part quant à la première, la fonction ω inverse du sinus d'amplitude z, savoir Arg sn (z, k), et d'autre part, quant à la seconde, ce que devient la fonction de deuxième espèce $\mathrm{Z}(\omega, k)$ étant exprimée semblablement au moyen de la variable z.

l'égalité ci-dessus (6) nous donnera donc pour la quantité I cette première valeur, obtenue en effectuant les intégrations à l'aide des variables x et k elles-mêmes :

$$(9)\quad I = im\left[\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{k\,dk}{\sqrt{K}} - \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)(g^2 - k^2)\,\frac{k\,dk}{\sqrt{K}}\right].$$

Ce premier résultat acquis, nous aurons évidemment une seconde expression de la même quantité en nous reportant à la valeur, déjà rappelée, que nous avons trouvée pour elle dans notre Chapitre I [formule (86) et tableau A qui la précède (p. 65)], en substituant pour les intégrations au système des variables s et t le système des variables ω et θ définies par les équations (35), à la condition, bien entendu, d'effectuer dans ces résultats les mêmes changements de notations que nous venons d'opérer tout à l'heure pour arriver au résultat précédent, à savoir : de remplacer dans tout le tableau A précité à la fois ϖ, s, t, s_1 et t_1, par les valeurs indiquées par les équations (1), (2), (2^{bis}) et (2^{ter}) ci-dessus, savoir :

$$(10)\quad \begin{cases} \varpi = m^2g^2, & s_1 = l^2, & t_1 = l^2, \\ & s_2 = l^2 + m^2x^2, & t_2 = l^2 + m^2(g^2 - k^2). \end{cases}$$

Effectuant donc cette opération, si nous portons alors en premier lieu notre attention sur les groupes (I) et (III) du tableau en question, dont les valeurs correspondantes ne diffèrent entre elles que par le changement de s_1 en t_1, nous constatons tout d'abord que, par suite de la valeur commune $s_1 = t_1 = l^2$ que nous venons d'écrire, les dites valeurs correspondantes sont identiques dans ces groupes, et qu'en en considérant seulement les premières lignes, on aura de cette façon :

$$\begin{cases} k_1^2 = k_3^2 = 1 + \dfrac{m^2}{\varpi + l^2 + n^2} = \dfrac{(\varpi + l^2 + n^2) + m^2}{\varpi + l^2 + n^2} = \dfrac{\varpi}{\varpi + l^2 + n^2}, \\ \operatorname{sn}^2(h_1, k_1) = \operatorname{sn}^2(h_3, k_3) = 1 + \dfrac{l^2 + n^2}{\varpi} = \dfrac{\varpi + l^2 + n^2}{\varpi} = \dfrac{1}{k_1^2} = \dfrac{1}{k_3^2}. \end{cases}$$

Or, comme les deux relations ainsi obtenues, savoir $\operatorname{sn}^2(h_1, k_1) = \dfrac{1}{k_1^2}$ et $\operatorname{sn}^2(h_3, k_3) = \dfrac{1}{k_3^2}$, entraînent dès lors les conditions

$\mathrm{dn}\,(h_1, k_1) = 0$ et $\mathrm{dn}\,(h_3, k_3) = 0$, il résulte immédiatement de là, en vertu de la définition même de la fonction $\Pi(\varphi, h, k)$, savoir

$$(10^{bis}) \qquad \Pi(\varphi, h, k) = \int_0^{\varphi} \frac{k^2 \,\mathrm{sn}\, h \,\mathrm{cn}\, h \,\mathrm{dn}\, h}{1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2 h \,\mathrm{dn}^2 \varphi} \,\mathrm{sn}^2 \varphi \, d\varphi,$$

que l'on aura, pour un argument φ quelconque, $\Pi(\varphi, h_1, k_1) = 0$, et $\Pi(\varphi, h_3, k_3) = 0$: d'où il suit que, sur les huit fonctions Π qui composent l'expression en question [formule (86) du Chap. I], il y en a quatre qui disparaîtront et que, par conséquent, en y introduisant également la valeur (1) ou (10) de ϖ, elle se réduira alors simplement à :

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} I = mg' \Big[&- \big\{ \Pi(\varphi_2^{(2)}, h_2, k_2) - \Pi(\varphi_2^{(1)}, h_2, k_2) \big\} \\ &+ \big\{ \Pi(\varphi_4^{(2)}, h_4, k_4) - \Pi(\varphi_4^{(1)}, h_4, k_4) \big\} \Big]. \end{aligned} \right.$$

Calculant donc à présent, toujours à l'aide des mêmes procédés, les deux autres groupes (II) et (IV) de ce même tableau A, lesquels sont ainsi seuls à considérer, et faisant attention, d'abord quant au premier de ces deux groupes, que les valeurs (10) de ϖ et de s_2 donnent, d'une part,

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \varpi + s_2 - l^2 &= m^2 g'^2 + (l^2 + m^2 x^2) - l^2 = m^2 (g'^2 + x^2), \\ \varpi + s_2 + n^2 &= m^2 (1 - g^2) + (l^2 + m^2 x^2) + n^2 \\ &= - m^2 g^2 + m^2 x^2 = m^2 (x^2 - g^2), \end{aligned} \right.$$

nous obtiendrons donc ainsi successivement, en ayant égard aux autres valeurs (10) de t_1 et t_2, pour ce premier groupe (II), les valeurs

$$\left\{ \begin{aligned} k_2^2 &= 1 + \frac{m^2}{\varpi + s_2 + n^2} = 1 + \frac{m^2}{m^2 (x^2 - g^2)} \\ &= 1 + \frac{1}{x^2 - g^2} = \frac{(x^2 - g^2) + 1}{x^2 - g^2} = \frac{x^2 + g'^2}{x^2 - g^2}, \\ \mathrm{sn}^2 (h_2, k_2) &= 1 + \frac{s_2 + n^2}{\varpi} = \frac{\varpi + s_2 + n^2}{\varpi} = \frac{m^2 (x^2 - g^2)}{m^2 g'^2} = \frac{x^2 - g^2}{g'^2}, \end{aligned} \right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(1)}, k_2) &= 1 + \frac{t_1 + n^2}{\varpi + s_2 - l^2} = 1 + \frac{l^2 + n^2}{m^2(g'^2 + x^2)} = 1 + \frac{-m^2}{m^2(g'^2 + x^2)} \\
&= 1 + \frac{-1}{g'^2 + x^2} = \frac{(1 - g^2 + x^2) - 1}{g'^2 + x^2} = \frac{x^2 - g^2}{x^2 + g'^2} = \frac{1}{k_2^2}, \\
\operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2) &= 1 + \frac{t_2 + n^2}{\varpi + s_2 - l^2} = 1 + \frac{[l^2 + m^2(g^2 - k^2)] + n^2}{m^2(g'^2 + x^2)} \\
&= 1 + \frac{(l^2 + m^2 + n^2) - m^2(1 - g^2 + k^2)}{m^2(g'^2 + x^2)} \\
&= 1 + \frac{-(g'^2 + k^2)}{g'^2 + x^2} = \frac{x^2 - k^2}{x^2 + g'^2}.
\end{aligned}\right.$$

Et de même, en observant, quant au second groupe (IV), que les mêmes valeurs (10) de ϖ et de t_2 donnent, d'autre part,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
\varpi + t_2 + n^2 &= m^2(1 - g^2) + [l^2 + m^2(g^2 - k^2)] + n^2 = -m^2k^2, \\
\varpi + t_2 - l^2 &= m^2(1 - g^2) + [l^2 + m^2(g^2 - k^2)] - l^2 = m^2(1 - k^2),
\end{aligned}\right.$$

nous trouverons semblablement, eu égard aux valeurs (10) de s_1 et de s_2, pour le second groupe (IV),

$$\left\{\begin{aligned}
k_4^2 &= 1 + \frac{m^2}{\varpi + t_2 + n^2} = 1 + \frac{m^2}{-m^2k^2} \\
&= 1 + \frac{1}{-k^2} = \frac{1 - k^2}{-k^2}, \\
\operatorname{sn}^2(h_4, k_4) &= 1 + \frac{t_2 + n^2}{\varpi} = \frac{\varpi + t_2 + n^2}{\varpi} = \frac{-m^2k^2}{m^2g'^2} = \frac{-k^2}{g'^2}, \\
\operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(1)}, k_4) &= 1 + \frac{s_1 + n^2}{\varpi + t_2 - l^2} = 1 + \frac{l^2 + n^2}{m^2(1 - k^2)} = 1 + \frac{-m^2}{m^2(1 - k^2)} \\
&= 1 + \frac{-1}{1 - k^2} = \frac{(1 - k^2) - 1}{1 - k^2} = \frac{-k^2}{1 - k^2} = \frac{1}{k_4^2}, \\
\operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) &= 1 + \frac{s_2 + n^2}{\varpi + t_2 - l^2} = 1 + \frac{(l^2 + m^2x^2) + n^2}{m^2(1 - k^2)} \\
&= 1 + \frac{-m^2 + m^2x^2}{m^2(1 - k^2)} = 1 + \frac{-1 + x^2}{1 - k^2} = \frac{x^2 - k^2}{1 - k^2}.
\end{aligned}\right.$$

C'est-à-dire, en récrivant, pour plus de clarté, simplement les résultats que nous venons d'obtenir, que les divers éléments qui interviennent dans l'expression demandée (11) seront définis séparément pour chacun des deux groupes, par les deux systèmes d'équations :

$$(II)\quad \begin{cases} k_2^2 = \dfrac{x^2 + g'^2}{x^2 - g^2}, & \operatorname{sn}^2(h_2, k_2) = \dfrac{x^2 - g^2}{g'^2}, \\ \operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(1)}, k_2) = \dfrac{1}{k_2^2}, & \operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2) = \dfrac{x^2 - k^2}{x^2 + g'^2}; \end{cases}$$

$$(IV)\quad \begin{cases} k_4^2 = \dfrac{1 - k^2}{-k^2}, & \operatorname{sn}^2(h_4, k_4) = \dfrac{-k^2}{g'^2}, \\ \operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(1)}, k_4) = \dfrac{1}{k_4^2} & \operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) = \dfrac{x^2 - k^2}{1 - k^2}. \end{cases}$$

Or, parmi ces définitions, deux surtout attirent à première vue l'attention, savoir les deux valeurs

$$\operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(1)}, k_2) = \frac{1}{k_2^2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(1)}, k_4) = \frac{1}{k_4^2},$$

parce qu'en donnant le droit de prendre pour les deux arguments $\varphi_2^{(1)}$ et $\varphi_4^{(1)}$ respectivement les valeurs

$$(14)\qquad \varphi_2^{(1)} = \mathrm{K}_2 + i\mathrm{K}'_2, \qquad \varphi_4^{(1)} = \mathrm{K}_4 + i\mathrm{K}'_4,$$

K_2, K'_2, K_4, K'_4 étant les fonctions complètes relatives aux modules k_2 et k_4, elles font voir que chacune des deux accolades qui figurent à l'intérieur des crochets dans l'expression (11) en question, est à présent, en sous-entendant, pour les trois éléments à la fois, l'indice 2 ou 4, une différence de la forme

$$\Pi(\varphi^{(2)}, h, k) - \Pi(\mathrm{K} + i\mathrm{K}', h, k),$$

et pourra dès lors être ramenée à ne plus contenir qu'une seule fonction Π, dont l'argument sera très facile à définir à nouveau par le moyen des égalités (II) ou (IV) que nous venons d'obtenir.

En effet, considérons la formule suivante, que nous avons établie sous le numéro (4) dans la Note I de l'Appendice de notre *Mémoire sur l'Attraction du Parallélipipède Ellipsoïdal*, comme

cas particulier de la formule d'addition des arguments relative à la fonction Π, savoir :

$$\Pi[\varphi - (K + iK'), h] = \Pi(\varphi, h) - [\Pi(h) + i\Pi'(h)] + \frac{1}{4}\log\frac{\mathrm{cn}^2(\varphi - h)}{\mathrm{cn}^2(\varphi + h)}.$$

En y écrivant simplement $\varphi^{(2)}$ au lieu de φ, puis mettant en évidence le module dans l'algorithme des différentes fonctions elliptiques, et nous souvenant enfin que, par la définition même des fonctions complètes $\Pi(h)$ et $\Pi'(h)$, l'on a

$$\Pi(h) + i\Pi'(h) = \Pi(K + iK', h),$$

cette formule donnera alors immédiatement :

$$(15)\quad \left\{ \begin{array}{c} \Pi(\varphi^{(2)}, h, k) - \Pi(K + iK', h, k) \\ = \Pi[\varphi^{(2)} - (K + iK'), h, k] - \frac{1}{2}\log\frac{\mathrm{cn}(\varphi^{(2)} - h, k)}{\mathrm{cn}(\varphi^{(2)} + h, k)}. \end{array} \right.$$

Or, si maintenant, tenant compte des valeurs précédentes (14) des arguments $\varphi_2^{(1)}$ et $\varphi_4^{(1)}$, nous appliquons cette dernière formule aux deux accolades précitées, à savoir celles envisagées tout à l'heure dans l'expression (11), lesquelles sont caractérisées chacune respectivement par l'indice inférieur 2 ou 4 affectant à la fois tous les éléments qui figurent dans la dite accolade, il sera aisé de reconnaître, ainsi que nous allons le faire voir, que la fonction soumise au signe logarithme aura exactement la même valeur dans les deux accolades, en sorte que les deux logarithmes en question ne pourront différer que par un multiple de $2i\pi$: d'où il résultera immédiatement alors que les termes logarithmiques ne laisseront d'autre trace à l'intérieur des crochets de la dite formule (11), qu'une constante additive de la forme $C = ni\pi$.

Pour le montrer, ayant évidemment

$$(16)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{cn}(\varphi^{(2)} - h)}{\mathrm{cn}(\varphi^{(2)} + h)} = \dfrac{\mathrm{cn}\,\varphi^{(2)}\,\mathrm{cn}\,h + \mathrm{sn}\,\varphi^{(2)}\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{dn}\,\varphi^{(2)}\,\mathrm{dn}\,h}{\mathrm{cn}\,\varphi^{(2)}\,\mathrm{cn}\,h - \mathrm{sn}\,\varphi^{(2)}\,\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{dn}\,\varphi^{(2)}\,\mathrm{dn}\,h} \\ \qquad = \dfrac{1 + \dfrac{\mathrm{sn}\,\varphi^{(2)}\,\mathrm{dn}\,\varphi^{(2)}}{\mathrm{cn}\,\varphi^{(2)}}\,\dfrac{\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{dn}\,h}{\mathrm{cn}\,h}}{1 - \dfrac{\mathrm{sn}\,\varphi^{(2)}\,\mathrm{dn}\,\varphi^{(2)}}{\mathrm{cn}\,\varphi^{(2)}}\,\dfrac{\mathrm{sn}\,h\,\mathrm{dn}\,h}{\mathrm{cn}\,h}}, \end{array} \right.$$

il suffira donc de faire voir, qu'avec les indices inférieurs, soit 2 soit 4 affectant à la fois $\varphi^{(2)}$ et h, le produit $\frac{\operatorname{sn}\varphi^{(2)}\operatorname{dn}\varphi^{(2)}}{\operatorname{cn}\varphi^{(2)}}\frac{\operatorname{sn} h \operatorname{dn} h}{\operatorname{cn} h}$ présentera exactement la même expression dans les deux cas.

Or, avec l'indice 2 d'abord, les définitions (II) (p. 12) donnent : d'une part quant à h, en tenant compte de la relation $g^2 + g'^2 = 1$,

$$\left\{\begin{aligned}
&\operatorname{sn}^2(h_2, k_2) = \frac{x^2 - g^2}{g'^2},\\
&\operatorname{cn}^2(h_2, k_2) = 1 - \operatorname{sn}^2(h_2, k_2) = 1 - \frac{x^2 - g^2}{g'^2} = \frac{g'^2 - (x^2 - g^2)}{g'^2} = \frac{1 - x^2}{g'^2},\\
&\operatorname{dn}^2(h_2, k_2) = 1 - k_2^2 \operatorname{sn}^2(h_2, k_2) = 1 - \frac{x^2 + g'^2}{x^2 - g^2}\frac{x^2 - g^2}{g'^2}\\
&\qquad\qquad = 1 - \frac{x^2 + g'^2}{g'^2} = \frac{-x^2}{g'^2},
\end{aligned}\right.$$

d'où

$$(17)\qquad \frac{\operatorname{sn}^2(h_2, k_2)\operatorname{dn}^2(h_2, k_2)}{\operatorname{cn}^2(h_2, k_2)} = \frac{\dfrac{x^2 - g^2}{g'^2}\dfrac{-x^2}{g'^2}}{\dfrac{1 - x^2}{g'^2}} = \frac{-x^2(x^2 - g^2)}{g'^2(1 - x^2)};$$

et d'autre part quant à $\varphi^{(2)}$,

$$(18)\left\{\begin{aligned}
&\operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2) = \frac{x^2 - k^2}{x^2 + g'^2},\\
&\operatorname{cn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2) = 1 - \operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2) = 1 - \frac{x^2 - k^2}{x^2 + g'^2} = \frac{g'^2 + k^2}{x^2 + g'^2},\\
&\operatorname{dn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2) = 1 - k_2^2 \operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2)\\
&\qquad = 1 - \frac{x^2 + g'^2}{x^2 - g^2}\frac{x^2 - k^2}{x^2 + g'^2} = \frac{(x^2 - g^2) - (x^2 - k^2)}{x^2 - g^2}\\
&\qquad\qquad = \frac{-(g^2 - k^2)}{x^2 - g^2},
\end{aligned}\right.$$

d'où

$$(19)\left\{\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2)\operatorname{dn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2)}{\operatorname{cn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2)} &= \frac{\dfrac{x^2 - k^2}{x^2 + g'^2}\dfrac{-(g^2 - k^2)}{x^2 - g^2}}{\dfrac{g'^2 + k^2}{x^2 + g'^2}}\\
&= \frac{-(x^2 - k^2)(g^2 - k^2)}{(x^2 - g^2)(g'^2 + k^2)};
\end{aligned}\right.$$

et par conséquent, en multipliant entre elles ces deux valeurs (17) et (19) :

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{sn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2)\,\mathrm{dn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2)}{\mathrm{cn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2)}\,\dfrac{\mathrm{sn}^2(h_2, k_2)\,\mathrm{dn}^2(h_2, k_2)}{\mathrm{cn}^2(h_2, k_2)} \\ = \dfrac{-(x^2-k^2)(g^2-k^2)}{(x^2-g^2)(g^2+k^2)}\,\dfrac{-x^2(x^2-g^2)}{g^2(1-x^2)} = \dfrac{x^2}{g^2}\,\dfrac{x^2-k^2}{1-x^2}\,\dfrac{g^2-k^2}{g^2+k^2}. \end{array}\right.$$

Et de même, avec l'indice 4, les définitions analogues (IV) (p. 12), donneront : d'une part quant à h,

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{sn}^2(h_4, k_4) = \dfrac{-k^2}{g^2}, \\ \mathrm{cn}^2(h_4, k_4) = 1 - \mathrm{sn}^2(h_4, k_4) = 1 - \dfrac{-k^2}{g^2} = \dfrac{g^2+k^2}{g^2}, \\ \mathrm{dn}^2(h_4, k_4) = 1 - k_4^2\,\mathrm{sn}^2(h_4, k_4) = 1 - \dfrac{1-k^2}{-k^2}\,\dfrac{-k^2}{g^2} \\ \qquad\qquad = 1 - \dfrac{1-k^2}{1-g^2} = \dfrac{-g^2+k^2}{g^2}, \end{array}\right.$$

d'où

$$(21)\quad \frac{\mathrm{sn}^2(h_4, k_4)\,\mathrm{dn}^2(h_4, k_4)}{\mathrm{cn}^2(h_4, k_4)} = \frac{\dfrac{-k^2}{g^2}\,\dfrac{-g^2+k^2}{g^2}}{\dfrac{g^2+k^2}{g^2}} = \frac{k^2(g^2-k^2)}{g^2(g^2+k^2)};$$

et d'autre part quant à $\varphi^{(2)}$,

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) = \dfrac{x^2-k^2}{1-k^2}, \\ \mathrm{cn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) = 1 - \mathrm{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) = 1 - \dfrac{x^2-k^2}{1-k^2} = \dfrac{1-x^2}{1-k^2}, \\ \mathrm{dn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) = 1 - k_4^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) \\ \qquad = 1 - \dfrac{1-k^2}{-k^2}\,\dfrac{x^2-k^2}{1-k^2} = \dfrac{-k^2-(x^2-k^2)}{1-k^2} = \dfrac{x^2}{k^2}, \end{array}\right.$$

d'où

$$(23)\qquad \frac{\mathrm{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4)\,\mathrm{dn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4)}{\mathrm{cn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4)} = \frac{\dfrac{x^2-k^2}{1-k^2}\,\dfrac{x^2}{k^2}}{\dfrac{1-x^2}{1-k^2}} = \frac{(x^2-k^2)\,x}{(1-x^2)\,k^2};$$

et par conséquent, en multipliant encore entre elles ces deux valeurs (23) et (21),

$$\frac{\mathrm{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4)\,\mathrm{dn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4)}{\mathrm{cn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4)}\,\frac{\mathrm{sn}^2(h_4, k_4)\,\mathrm{dn}^2(h_4, k_4)}{\mathrm{cn}^2(h_4, k_4)}$$
$$= \frac{(x^2-k^2)\,x^2}{(1-x^2)\,k^2}\,\frac{k^2\,(g^2-k^2)}{g'^2\,(g'^2+k^2)} = \frac{x^2}{g'^2}\,\frac{x^2-k^2}{1-x^2}\,\frac{g^2-k^2}{g'^2+k^2},$$

valeur identique à celle (20) déjà rencontrée tout à l'heure quant à l'indice 2.

En désignant dès lors par Ω la racine carrée de cette même quantité, c'est-à-dire l'expression

$$(24)\qquad \Omega = \frac{x}{g'}\,\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}},$$

comme il résulte de là que, en omettant le membre intermédiaire, les égalités (16) donneront alors

$$(24^{bis})\qquad \frac{\mathrm{cn}(\varphi_2^{(2)} - h_2, k_2)}{\mathrm{cn}(\varphi_2^{(2)} + h_2, k_2)} = \frac{\mathrm{cn}(\varphi_4^{(2)} - h_4, k_4)}{\mathrm{cn}(\varphi_4^{(2)} + h_4, k_4)} = \frac{1+\Omega}{1-\Omega},$$

la forme de chacune des deux accolades en question se réduira donc ainsi, par le moyen de la formule ci-dessus (15), comme nous l'avons annoncé, à cette autre forme plus simple

$$(24^{ter})\qquad \begin{cases} \Pi[\varphi^{(2)} - (K + iK'), h, k] - \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\Omega}{1-\Omega} \\ \qquad = \Pi(\varphi, h, k) - \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\Omega}{1-\Omega}, \end{cases}$$

le nouvel argument $\varphi = \varphi^{(2)} - (K + iK')$ de l'unique fonction Π restante étant, en conséquence, donné maintenant par l'équation

$$\operatorname{sn}(\varphi, k) = \operatorname{sn}[\varphi^{(2)} - (K + iK'), k] = -\frac{\operatorname{dn}(\varphi^{(2)}, k)}{k \operatorname{cn}(\varphi^{(2)}, k)},$$

ou, en élevant au carré :

$$\operatorname{sn}^2(\varphi, k) = \frac{\operatorname{dn}^2(\varphi^{(2)}, k)}{k^2 \operatorname{cn}^2(\varphi^{(2)}, k)}.$$

En appliquant cette dernière formule aux deux arguments $\varphi_2^{(2)}$ et $\varphi_4^{(2)}$, ce qui se fera en y affectant à la fois tous les symboles de l'indice inférieur, soit 2, soit 4, puis tenant compte à cet effet des expressions (18) et (22) ainsi que des valeurs (II) et (IV) trouvées ci-dessus (p. 12) pour les modules k_2 et k_4, nous obtiendrons donc ainsi, pour définir les nouveaux arguments φ_2 et φ_4 des deux fonctions Π seules subsistantes désormais dans notre formule (11) qu'il s'agissait de transformer, les nouvelles équations,

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sn}^2(\varphi_2, k_2) = \dfrac{\operatorname{dn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2)}{k_2^2 \operatorname{cn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2)} = \dfrac{\dfrac{-(g^2 - k^2)}{x^2 - g^2}}{\dfrac{x^2 + g'^2}{x^2 - g^2}\,\dfrac{g'^2 + k^2}{x^2 + g'^2}} = \dfrac{-(g^2 - k^2)}{g'^2 + k^2}, \\[2ex] \operatorname{sn}^2(\varphi_4, k_4) = \dfrac{\operatorname{dn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4)}{k_4^2 \operatorname{cn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4)} = \dfrac{\dfrac{x^2}{k^2}}{\dfrac{1 - k^2}{-k^2}\,\dfrac{1 - x^2}{1 - k^2}} = \dfrac{-x^2}{1 - x^2}; \end{array}\right.$$

de telle sorte que, en rapprochant, pour plus de clarté, ces deux valeurs de celles des premières lignes des groupes correspondants précités (II) ou (IV), les deux seules fonctions Π restantes auront alors leurs éléments définis respectivement par les deux nouveaux groupes :

(II') $k_2^2 = \dfrac{x^2 + g'^2}{x^2 - g^2}$, $\operatorname{sn}^2(h_2, k_2) = \dfrac{x^2 - g^2}{g'^2}$, $\operatorname{sn}^2(\varphi_2, k_2) = \dfrac{-(g^2 - k^2)}{g'^2 + k^2}$;

(IV') $k_4^2 = \dfrac{1 - k^2}{-k^2}$, $\operatorname{sn}^2(h_4, k_4) = \dfrac{-k^2}{g'^2}$, $\operatorname{sn}^2(\varphi_4, k_4) = \dfrac{-x^2}{1 - x^2}$.

Et avec les valeurs ainsi définies, la formule en question (11) se réduira ainsi, la différence des deux termes logarithmiques étant, comme nous l'avons dit, $C = ni\pi$, à la forme très simple

$$(25) \qquad I = mg' [- \Pi(\varphi_2, h_2, k_2) + \Pi(\varphi_4, h_4, k_4) + C],$$

dont la comparaison avec l'expression antérieure (9) de la même quantité, obtenue en effectuant l'intégration à l'aide des variables x et k elles-mêmes, fournira dès lors l'égalité

$$im \left[\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{k\,dk}{\sqrt{K}} - \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right) (g^2 - k^2) \frac{k\,dk}{\sqrt{K}} \right]$$
$$= mg' [- \Pi(\varphi_2, h_2, k_2) + \Pi(\varphi_4, h_4, k_4) + C],$$

ou, en multipliant les deux membres par $-\frac{2i}{m}$:

$$\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} - \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}}$$
$$= 2ig' [\Pi(\varphi_2, h_2, k_2) - \Pi(\varphi_4, h_4, k_4) - C].$$

Or si, dans cette formule, on suppose en même temps $g = k$ et $x = 0$, l'on aura à la fois par les définitions précédentes (II') et (IV')

$$\text{sn}(\varphi_2, k_2) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \Pi(\varphi_2, h_2, k_2) = 0,$$

et

$$\text{sn}(\varphi_4, k_4) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \Pi(\varphi_4, h_4, k_4) = 0,$$

en sorte que la dite formule se réduira à $0 = 2ig'(-C)$, ce qui fait voir que la constante C est nulle.

En vue de permettre à l'esprit du Lecteur de se représenter plus aisément l'ensemble de ce résultat, nous l'énoncerons, de même que tous ceux que nous établirons dans la suite de ce Mémoire, sous la forme d'un Théorème d'Analyse, en écrivant seulement pour la symétrie, maintenant que les calculs sont achevés, φ_1, h_1, k_1 à la place de φ_4, h_4, k_4, et nous aurons alors, de cette façon, le premier Théorème, dans lequel la constante g est supposée recevoir une valeur quelconque :

THÉORÈME I. — *Si l'on convient de représenter par les symboles* $F_1(z,k)$ *et* $F_2(z,k)$ *les deux intégrales elliptiques* normales (*) *de première et de deuxième espèces, savoir*

$$(26)\quad F_1(z,k)=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\quad F_2(z,k)=\int_0^z \frac{k^2z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

et, conformément à la notation de JACOBI, *par* $\Pi(\varphi,h,k)$ *la fonction elliptique de troisième espèce, on aura la formule de quadrature*

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k},k\right)\frac{2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}}-\int_g^k F_1\left(\frac{x}{k},k\right)\frac{2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}} \\ \qquad = 2ig'[\Pi(\varphi_2,h_2,k_2)-\Pi(\varphi_1,h_1,k_1)], \end{array}\right.$$

dans laquelle g *et* g' *désignant deux paramètres arbitraires sous la condition* $g^2+g'^2=1$, *les six éléments* φ_1, h_1, k_1; φ_2, h_2, k_2 *sont définis séparément par les égalités suivantes :*

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{lll} k_1=\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{ik}, & \operatorname{sn}(h_1,k_1)=\dfrac{ik}{g'}, & \operatorname{sn}(\varphi_1,k_1)=\dfrac{ix}{\sqrt{1-x^2}}, \\ k_2=\dfrac{\sqrt{x^2+g'^2}}{\sqrt{x^2-g^2}}, & \operatorname{sn}(h_2,k_2)=\dfrac{\sqrt{x^2-g^2}}{g'}, & \operatorname{sn}(\varphi_2,k_2)=\dfrac{i\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}. \end{array}\right.$$

On remarquera la présence dans cette formule des paramètres g et g', lesquels, remplissant dans la seconde intégration en k un rôle analogue à celui de k et de k' dans la première intégration en x, semblent appelés à recevoir à cause de cela la dénomination de *modules complémentaires du second ordre.*

Voyons maintenant ce que deviendra ce résultat pour les valeurs limites corrélatives $g=1$, $g'=0$ de ces paramètres, pour lesquelles $\operatorname{sn}(h_1,k_1)$ et $\operatorname{sn}(h_2,k_2)$ étant simultanément infinis d'après les définitions qui précèdent, h_1 et h_2 pourront être considérés alors comme égaux l'un à iK_1' et l'autre à iK_2'.

(*) Voir la note de la page 8 ci-dessus.

Il suffira pour cela de remarquer que, pour des éléments φ, h, k quelconques, la fonction $\Pi(\varphi, h, k)$ donnant, si l'on y fait $h = h' + iK'$,

$$\frac{1}{\operatorname{sn} h}\Pi(\varphi,h,k) = \int_0^{\varphi} \frac{k^2 \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h.\operatorname{sn}^2\varphi}{1-k^2\operatorname{sn}^2 h\operatorname{sn}^2\varphi}\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\varphi} \frac{k^2 \operatorname{cn}(h'+iK')\operatorname{dn}(h'+iK').\operatorname{sn}^2\varphi}{1-k^2\operatorname{sn}^2(h'+iK')\operatorname{sn}^2\varphi}\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\varphi} \frac{k^2\dfrac{-i\operatorname{dn} h'}{k\operatorname{sn} h'}\dfrac{-i\operatorname{cn} h'}{\operatorname{sn} h'}\operatorname{sn}^2\varphi}{1-k^2\dfrac{1}{k^2\operatorname{sn}^2 h'}\operatorname{sn}^2\varphi}\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\varphi} \frac{-k\operatorname{dn} h'\operatorname{cn} h'\operatorname{sn}^2\varphi}{\operatorname{sn}^2 h'-\operatorname{sn}^2\varphi}\,d\varphi,$$

l'on aura par conséquent pour la limite $h' = 0$ ou $h = iK'$,

$$\lim\left[\frac{1}{\operatorname{sn} h}\Pi(\varphi,h,k)\right]_{h=iK'} = \int_0^{\varphi}\frac{-k\operatorname{sn}^2\varphi}{-\operatorname{sn}^2\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\varphi} k\,d\varphi = k\varphi.$$

Appliquant dès lors cette formule aux deux fonctions $\Pi(\varphi_1, h_1, k_1)$ et $\Pi(\varphi_2, h_2 k_2)$ dont les paramètres h_1 et h_2 donnent séparément, d'après les définitions (28),

$$g' = \frac{ik}{\operatorname{sn}(h_1, k_1)}$$

et

$$g' = \frac{\sqrt{x^2-g^2}}{\operatorname{sn}(h_2,k_2)} = \frac{\sqrt{x^2+g^2}}{\dfrac{\sqrt{x^2+g^2}}{\sqrt{x^2-g^2}}}\,\frac{1}{\operatorname{sn}(h_2,k_2)} = \frac{\sqrt{x^2+g^2}}{k_2}\,\frac{1}{\operatorname{sn}(h_2,k_2)},$$

l'on trouvera, pour la limite relative à $g = 1$ ou $g' = 0$ du second membre de la formule en question (27), en tenant compte de nouveau, à plusieurs reprises, de ces mêmes définitions (28) :

$$(28^{bis})\quad \left\{\begin{array}{l} \lim\left[2ig'\right\}\Pi(\varphi_2, h_2, k_2) - \Pi(\varphi_1, h_1, k_1)\left\{\right]_{g'=0} \\ = 2i\left\{\lim\left[g'\Pi(\varphi_2, h_2, k_2)\right]_{g'=0} - \lim\left[g'\Pi(\varphi_1, h_1, k_1)\right]_{g'=0}\right\{ \\ = 2i\left\{\lim\left[\dfrac{\sqrt{x^2+g'^2}}{k_2}\dfrac{1}{\mathrm{sn}(h_2, k_2)}\Pi(\varphi_2, h_2, k_2)\right]_{g'=0}\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left. - \lim\left[\dfrac{ik}{\mathrm{sn}(h_1, k_1)}\Pi(\varphi_1, h_1, k_1)\right]_{g'=0}\right. \\ = 2i\left(\dfrac{x}{k_2}k_2\varphi_2 - ik.k_1\varphi_1\right) = 2i\left(x\varphi_2 - \sqrt{1-k^2}.\varphi_1\right). \end{array}\right.$$

Or, les dites définitions se réduisant, pour la même limite $g = 1$ ou $g' = 0$, à celle-ci

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} k_1 = \dfrac{\sqrt{1-k^2}}{ik}, \\ k_2 = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-1}} = \sqrt{\dfrac{-x^2}{1-x^2}} = \dfrac{ix}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \mathrm{sn}(\varphi_1, k_1) = \dfrac{ix}{\sqrt{1-x^2}} = t_1, \\ \mathrm{sn}(\varphi_2, k_2) = \dfrac{i\sqrt{1-k^2}}{-k} = \dfrac{\sqrt{1-k^2}}{ik} = t_2, \end{array}\right.$$

cette dernière expression (28^{bis}), et par conséquent la quantité envisagée elle-même, se réduira donc à la suivante :

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{l} 2i\left(x\varphi_2 - \sqrt{1-k^2}\,\varphi_1\right) \\ = 2i\left[x\displaystyle\int_0^{t_2}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_2^2t^2)}} - \sqrt{1-k^2}\int_0^{t_1}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_1^2t^2)}}\right] \\ = 2i\left[x\mathrm{F}_1(t_2, k_2) - \sqrt{1-k^2}\,\mathrm{F}_1(t_1, k_1)\right] \\ = 2i\left[x\mathrm{F}_1\left(\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{ik}, \dfrac{ix}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \sqrt{1-k^2}\,\mathrm{F}_1\left(\dfrac{ix}{\sqrt{1-x^2}}, \dfrac{\sqrt{1-k^2}}{ik}\right)\right]. \end{array}\right.$$

Tel sera donc dans ce cas le second membre de la formule en question, duquel on pourra, si l'on aime mieux, faire disparaître

les imaginaires, en employant par exemple, parmi plusieurs autres, la substitution suivante

$$(31)\qquad t = \frac{iz}{\sqrt{1-z^2}} \qquad \text{ou} \qquad z = \frac{-it}{\sqrt{1-t^2}},$$

les limites de cette nouvelle variable z, correspondantes à celles t_1 et t_2 de la variable t, étant dès lors, d'après les valeurs précédentes (29) de t_1 et t_2 :

$$(32)\quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{-it_1}{\sqrt{1-t_1^2}} = -\,i\,\dfrac{\dfrac{ix}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1-x^2}}} = \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)+x^2}} = x, \\ z_2 = \dfrac{-it_2}{\sqrt{1-t_2^2}} = \dfrac{-\,i\,\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{ik}}{\sqrt{1+\dfrac{1-k^2}{k^2}}} = \dfrac{-\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{k^2+(1-k^2)}} = -\sqrt{1-k^2}. \end{cases}$$

En effet, cette substitution (31) donnant, en ayant toujours égard aux mêmes définitions (28),

$$\begin{cases} dt = i\,\dfrac{\sqrt{1-z^2}+\dfrac{z^2}{\sqrt{1-z^2}}}{1-z^2}\,dz = i\,\dfrac{(1-z^2)+z^2}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dz = \dfrac{i\,dz}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ 1-t^2 = 1+\dfrac{z^2}{1-z^2} = \dfrac{(1-z^2)+z^2}{1-z^2} = \dfrac{1}{1-z^2}, \\ 1-k_1^2t^2 = 1-\dfrac{1-k^2}{-k^2}\,\dfrac{-z^2}{1-z^2} = \dfrac{k^2(1-z^2)-(1-k^2)z^2}{k^2(1-z^2)} = \dfrac{k^2-z^2}{k^2(1-z^2)}, \\ 1-k_2^2t^2 = 1-\dfrac{-x^2}{1-x^2}\,\dfrac{-z^2}{1-z^2} = \dfrac{(1-x^2)(1-z^2)-x^2z^2}{(1-x^2)(1-z^2)} \\ \qquad\qquad = \dfrac{1-x^2-z^2}{(1-x^2)(1-z^2)} = \dfrac{1-\dfrac{z^2}{1-x^2}}{1-z^2}, \end{cases}$$

l'on aura donc séparément, eu égard aux valeurs précédentes (32) de z_1 et z_2, ainsi qu'aux expressions (4) et (8),

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi_1 = F_1(t_1, k_1) &= \int_0^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_1^2t^2)}} = \int_0^{z_1} \frac{\dfrac{idz}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\dfrac{1}{1-z^2}\,\dfrac{k^2-z^2}{k^2(1-z^2)}}}\\ &= i\int_0^{z_1} \frac{k\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(k^2-z^2)}} = ik\int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{X}}\\ &= ik\,F_1\left(\frac{x}{k}, k\right);\end{aligned}\right.$$

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi_2 = F_1(t_2, k_2) &= \int_0^{t_2} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_2^2t^2)}}\\ &= \int_0^{z_2} \frac{\dfrac{idz}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\dfrac{1}{1-z^2}\cdot\dfrac{1}{1-z^2}\left(1-\dfrac{z^2}{1-x^2}\right)}}\\ &= i\int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\dfrac{z^2}{1-x^2}\right)}}\\ &= iF_1\left(z_2, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -iF_1\left(-z_2, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\ &= -iF_1\left(\sqrt{1-k^2}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right),\end{aligned}\right.$$

valeurs qui donneront, pour celle du dernier membre des égalités (28bis) :

$$\begin{aligned}&2i\,(x\varphi_2 - \sqrt{1-k^2}\varphi_1)\\ &= 2i\left[-ix\,F_1\left(\sqrt{1-k^2}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \sqrt{1-k^2}.ik\,F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\right]\\ &= 2\left[x\,F_1\left(\sqrt{1-k^2}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + k\sqrt{1-k^2}\,F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\right].\end{aligned}$$

Cette dernière expression, où la précédente (30), représentant ainsi indifféremment, comme le montrent les dites égalités (28bis), ce que devient, dans le cas limite $g = 1$, le second membre de la formule (27) qui exprimait notre Théorème I, nous avons donc établi de cette façon, comme conséquence du dit Théorème, la proposition subsidiaire (ou Corollaire) que nous allons énoncer :

COROLLAIRE. — *Les mêmes définitions étant admises que dans le Théorème* I, *la formule y relatée, pour la valeur limite de la constante* $g = 1$, *prendra la forme exceptionnelle*

$$(35)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_1^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{dk}{\sqrt{1-k^2}} - \int_1^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\sqrt{1-k^2}\,dk \\ = x\,F_1\left(\sqrt{1-k^2}, \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + k\sqrt{1-k^2}\,F_1\left(\dfrac{x}{k}, k\right), \end{array} \right.$$

formule que l'on pourra, si l'on aime mieux, écrire encore sous cette autre forme

$$(36)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_1^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{dk}{\sqrt{1-k^2}} - \int_1^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\sqrt{1-k^2}\,dk \\ = i\left[x\,F_1\left(\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{ik}, \dfrac{ix}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \sqrt{1-k^2}\,F_1\left(\dfrac{ix}{\sqrt{1-x^2}}, \dfrac{\sqrt{1-k^2}}{ik}\right)\right], \end{array} \right.$$

dont le second membre présente, quant à la fonction F_1, *une particularité analogue à celle relative à la fonction* Π, *de la formule dite* de l'échange de l'argument et du paramètre.

Le Lecteur trouvera, s'il le préfère, une autre démonstration *a posteriori* du Théorème I ci-dessus, purement analytique et au moyen de la seule différentiation, dans le Tome XXI des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES (Première Partie, pp. 120-126), démonstration plus laborieuse à la vérité que celle développée dans ce premier paragraphe, mais démonstration, par contre, plus directe, en ce qu'elle n'emprunte plus, comme la précédente, son point de départ à la question de Mécanique traitée antérieurement par nous dans le *Mémoire sur l'Attraction du Parallélipipède Ellipsoïdal.*

II

On comprend dès maintenant, sans que nous puissions encore entrer dans aucun détail à ce sujet, que la répétition des mêmes procédés fournira autant que l'on voudra de formules analogues à celle établie dans le paragraphe précédent, à la condition d'adopter à chaque fois comme point de départ un nouveau type d'intégrale double convenablement choisi pour jouer le rôle de l'intégrale I dans le calcul qui nous a conduit au Théorème I^er ci-dessus. Comme premier pas dans cette voie, nous établirons encore deux autres formules semblables qui introduiront dans leur partie intégrée, conjointement avec des termes algébriques, au lieu de la fonction elliptique de troisième espèce, la fonction de deuxième espèce et la fonction inverse de première espèce (ou argument) relatives toujours aux deux mêmes séries d'éléments φ_1, k_1 et φ_2, k_2, qui intervenaient déjà dans le précédent résultat : formules qui seront d'ailleurs manifestement distinctes, comme introduisant chacune successivement un ou plusieurs éléments analytiques qui n'intervenaient pas dans les précédentes.

A cet effet, considérons d'abord le type d'intégrale double, voisin de celui pris comme point de départ du calcul dans le paragraphe précédent,

$$(37) \qquad I^{(0)} = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{(s-t)\,[3\,(s+t-f) + 2\varpi]}{\sqrt{s+t+\varpi-f}}\,\frac{ds}{\sqrt{S}}\,\frac{dt}{\sqrt{T}},$$

les différents symboles ayant toujours la même signification que dans notre Chapitre I et le § I ci-dessus ; puis reprenons, à propos de cette nouvelle intégrale double, toute la série des procédés au moyen desquels nous sommes arrivés dans le dit Chapitre I à l'expression explicite (86) de l'intégrale $I^{(\varpi)}$ alors envisagée. Il est clair alors que l'introduction à la place de s et t des nouvelles

variables θ et ω (35) transformera d'abord l'intégrale double $I^{(\varpi)}$ actuellement proposée, eu égard à la valeur (37) du déterminant fonctionnel $\frac{\delta(s,t)}{\delta(\theta,\omega)}$ ainsi qu'à celle (38bis) du produit ST, dans la suivante, l'indication des limites des nouvelles variables étant omise pour un instant,

$$I^{(0)} = \frac{1}{2}\iint \frac{(s-t)(3\theta+2\varpi)}{\sqrt{\theta+\varpi}} \pm \frac{\delta(s,t)}{\delta(\theta,\omega)} \frac{d\omega\, d\theta}{\sqrt{ST}}$$
$$= \frac{1}{2}\iint \frac{3\theta+2\varpi}{\sqrt{\theta+\varpi}} \frac{d\omega\, d\theta}{\sqrt{\Omega}} = \frac{1}{2}\int \left(\int \frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right) \frac{3\theta+2\varpi}{\sqrt{\varpi+\theta}}\, d\theta,$$

laquelle deviendra ensuite, après qu'on y aura introduit les limites des variables θ et ω, comme dans notre Chapitre I pour l'expression (56) de $I^{(\varpi)}$, par le moyen de la formule de quadrature (60) et des formules (61) et (62),

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} I^{(0)} &= \sum_{\epsilon} \pm \frac{1}{2}\int_{\epsilon+\eta_1-f}^{\epsilon+\eta_2-f} \left(\int_{\Theta}^{E+\epsilon\theta} \frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right) \frac{3\theta+2\varpi}{\sqrt{\varpi+\theta}}\, d\theta \\ &= \sum_{\epsilon} \pm \frac{1}{2}\int_{\epsilon+\eta_1-f}^{\epsilon+\eta_2-f} [2\log F(\theta) - F(\Theta,\theta)] \frac{3\theta+2\varpi}{\sqrt{\varpi+\theta}}\, d\theta \\ &= \sum_{\epsilon} \pm \frac{1}{2}\int_{\epsilon+\eta_1-f}^{\epsilon+\eta_2-f} 2\log F(\theta) \frac{3\theta+2\varpi}{\sqrt{\varpi+\theta}}\, d\theta, \end{aligned}\right.$$

la partie de l'intégrale double correspondant au second terme $F(\Theta,\theta)$ de la parenthèse, lequel ne contient ni ϵ ni η, disparaissant en vertu du Théorème général démontré dans le même Chapitre (pp. 60 et 61).

Cela fait, si pour calculer cette dernière intégrale, nous employons encore le procédé de l'intégration par parties, la différentiation donnant dans le cas actuel

$$\frac{d}{d\theta}(2\theta\sqrt{\varpi+\theta}) = 2\sqrt{\varpi+\theta} + 2\theta\frac{1}{2\sqrt{\varpi+\theta}}$$
$$= \frac{2(\varpi+\theta)+\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}} = \frac{3\theta+2\varpi}{\sqrt{\varpi+\theta}},$$

d'où l'on conclura inversement, en ne considérant que les deux membres extrêmes et les intervertissant,

$$\int \frac{3\theta + 2\varpi}{\sqrt{\varpi + \theta}}\, d\theta = 2\theta\sqrt{\varpi + \theta} + \text{const.},$$

l'intégration par parties donnera donc dans ce cas, en ayant égard à la formule (68bis) du dit Chapitre I,

$$\int 2 \log \mathrm{F}(\theta) . \frac{3\theta + 2\varpi}{\sqrt{\varpi + \theta}}\, d\theta$$

$$= 2 \log \mathrm{F}(\theta) . 2\theta\sqrt{\varpi + \theta} - \int 2\theta\sqrt{\varpi + \theta} . 2 \frac{\mathrm{F}'(\theta)}{\mathrm{F}(\theta)}\, d\theta$$

$$= 4 \log \mathrm{F}(\theta) . \sqrt{\varpi + \theta} - \int 2\theta\sqrt{\varpi + \theta} . \frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{\sqrt{\mathrm{E}}}{\sqrt{l^2 - \epsilon + \theta}\sqrt{n^2 + \epsilon - \theta}}\right) d\theta$$

$$= \Psi(\theta) + 2\sqrt{\mathrm{E}} \int \frac{\sqrt{\varpi + \theta}}{\sqrt{l^2 - \epsilon + \theta}\sqrt{n^2 + \epsilon - \theta}}\, d\theta,$$

l'ensemble des termes représentés par le symbole $\Psi(\theta)$ participant évidemment de la propriété de symétrie que nous avons reconnue à la fonction $\mathrm{F}(\theta)$ dans le même Chapitre I (p. 59), c'est-à-dire étant tel qu'il se changera en une fonction symétrique de ϵ et de η, si l'on remplace θ par $\epsilon + \eta - f$: d'où il résulte immédiatement, en vertu du Théorème général précité, que pour la formation de l'expression en question (38) de $\mathrm{I}^{(0)}$, la dite fonction $\Psi(\theta)$ ne fournira encore aucun terme dans la sommation en ϵ, après qu'on y aura introduit les limites données de θ, et pourra dès lors être négligée de nouveau, en sorte que la dite expression se réduira simplement à la suivante

$$(39) \qquad \mathrm{I}^{(0)} = \sum_{\epsilon} \pm \sqrt{\mathrm{E}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{\varpi + \theta}}{\sqrt{l^2 - \epsilon + \theta}\sqrt{n^2 + \epsilon - \theta}}\, d\theta,$$

en désignant pour abréger, ainsi que nous le ferons dorénavant, par θ_1 et θ_2 les deux limites de la variable θ, savoir

$$(40) \qquad \theta_1 = \epsilon + \eta_1 - f, \qquad \theta_2 = \epsilon + \eta_2 - f,$$

et le radical $\sqrt{\bar{E}}$ étant supposé pris avec la détermination positive.

Cela posé, pour calculer l'intégrale définie qui figure dans cette expression, l'analogie conduisant naturellement à introduire à cet effet de nouveau les mêmes éléments φ et k définis par les formules (74) de notre Chapitre I à l'occasion d'un calcul tout semblable, nous conviendrons, pour abréger, de faire dans ce but à la fois

$$(41)\qquad \left\{\begin{array}{l} L = \varpi - l^2 + \epsilon, \qquad N = \varpi + n^2 - \epsilon, \\ \Delta\theta = \sqrt{(\varpi + \theta)\,(l^2 - \epsilon + \theta)\,(n^2 + \epsilon - \theta)}, \end{array}\right.$$

et alors les dites formules s'écrivant avec ces notations

$$(42)\qquad k^2 = \frac{L}{N}, \qquad \mathrm{sn}^2(\varphi, k) = \frac{\varpi + \theta}{L},$$

donneront

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{cn}^2(\varphi, k) = 1 - \mathrm{sn}^2(\varphi, k) = 1 - \dfrac{\varpi + \theta}{L} \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{L}[(\varpi - l^2 + \epsilon) - (\varpi + \theta)] = \dfrac{-(l^2 - \epsilon + \theta)}{L}, \\ \mathrm{dn}^2(\varphi, k) = 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi, k) = 1 - \dfrac{L}{N}\dfrac{\varpi + \theta}{L} \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{N}[(\varpi + \epsilon - \theta) - (\varpi + \theta)] = \dfrac{n^2 + \epsilon - \theta}{N}; \end{array}\right.$$

en sorte que l'on aura simultanément

$$(43)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \varpi + \theta = L\,\mathrm{sn}^2(\varphi, k), & l^2 - \epsilon + \theta = -L\,\mathrm{cn}^2(\varphi, k), \\ & n^2 + \epsilon - \theta = N\,\mathrm{dn}^2(\varphi, k), \end{array}\right.$$

et par conséquent, d'une part, en vertu de la définition (41) du radical $\Delta\theta$,

$$(44)\qquad \left\{\begin{array}{l} (\Delta\theta)^2 = (\varpi + \theta)\,(l^2 - \epsilon + \theta)\,(n^2 + \epsilon - \theta) \\ \qquad = L\,\mathrm{sn}^2\varphi\,.\,(-L\,\mathrm{cn}^2\varphi)\,.\,N\,\mathrm{dn}^2\varphi \\ \qquad = -NL^2\,\mathrm{sn}^2\varphi\,\mathrm{cn}^2\varphi\,\mathrm{dn}^2\varphi, \end{array}\right.$$

et, d'autre part, en différentiant la première des équations précédentes (43),

$$(45)\qquad \frac{d\theta}{\Delta\theta} = \frac{L \,.\, 2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{cn}\,\varphi\,\mathrm{dn}\,\varphi\,d\varphi}{i\,L\sqrt{\bar{N}}\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{cn}\,\varphi\,\mathrm{dn}\,\varphi} = \frac{2\,d\varphi}{i\sqrt{\bar{N}}},$$

puis de là, en ayant égard aux valeurs (41) et (42), la formule suivante, analogue à celle (73) de notre Chapitre I :

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\varpi}^{\theta} \frac{\sqrt{\varpi+\theta}}{\sqrt{l^2-\epsilon+\theta}\,\sqrt{n^2+\epsilon-\theta}}\,d\theta = \int_{-\varpi}^{\theta} (\varpi+\theta)\,\frac{d\theta}{\Delta\theta} \\ &= \int_0^{\varphi} L\,\mathrm{sn}^2\,\varphi\,\frac{2\,d\varphi}{i\sqrt{\bar{N}}} = -\,2i\sqrt{\bar{N}}\int_0^{\varphi}\frac{L}{\bar{N}}\,\mathrm{sn}^2\,\varphi\,d\varphi \\ &= -\,2i\sqrt{\bar{N}}\int_0^{\varphi} k^2\,\mathrm{sn}^2\,\varphi\,d\varphi = -\,2i\sqrt{\bar{N}}\,Z(\varphi,k). \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, quant aux limites de l'intégration envisagées dans l'expression (39), si, par analogie avec ce que nous avons fait dans notre tableau A du même Chapitre (p. 65) pour chacun des quatre modules qui y figurent, nous convenons de désigner en général par les symboles $\varphi^{(1)}$ et $\varphi^{(2)}$ les limites de l'argument φ correspondant respectivement aux deux limites de θ (40), cette dernière formule nous donnera donc

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{\varpi+\theta}}{\sqrt{l^2-\epsilon+\theta}\,\sqrt{n^2+\epsilon-\theta}}\,d\theta \\ &= -\,2i\sqrt{\bar{N}}\,[Z(\varphi^{(2)},k) - Z(\varphi^{(1)},k)]\,; \end{aligned}\right.$$

et si, de plus, nous adoptons le symbole $\bar{E}$ pour représenter le produit $\sqrt{E\,N}$ qui reviendra très fréquemment dans le cours de ce Mémoire, c'est-à-dire si nous faisons désormais

$$(48)\qquad \bar{E} = \sqrt{(l^2-\epsilon)\,(n^2+\epsilon)\,(\varpi+n^2+\epsilon)},$$

avec les mêmes conventions relatives aux différentes déterminations de ϵ que pour la quantité E [formules (53) du Chap. I],

l'expression obtenue tout à l'heure (39) pour $I^{(0)}$ s'écrira donc, sous forme condensée, par le moyen des deux égalités précédentes,

$$(49) \qquad I^{(0)} = -2i \sum_{\epsilon} \pm \overline{E}\,[Z(\varphi^{(2)}, k) - Z(\varphi^{(1)}, k)]_{\epsilon}$$

l'indice ϵ inscrit au bas du second crochet ayant pour signification de rappeler que les trois éléments $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$ et k des fonctions qui figurent à l'intérieur de ces crochets dépendent à la fois d'une certaine détermination de ϵ : c'est-à-dire, explicitement, qu'en tenant compte de la signification admise pour le double signe à l'occasion de la formule (55) du Chapitre I, nous aurons la formule suivante, homologue de celle (86) du dit Chapitre :

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} I^{(0)} = -2i\,[& \overline{S}_1 \{ Z(\varphi_1^{(2)}, k_1) - Z(\varphi_1^{(1)}, k_1) \{ \\ & - \overline{S}_2 \{ Z(\varphi_2^{(2)}, k_2) - Z(\varphi_2^{(1)}, k_2) \{ \\ & - \overline{T}_1 \{ Z(\varphi_3^{(2)}, k_3) - Z(\varphi_3^{(1)}, k_3) \{ \\ & + \overline{T}_2 \{ Z(\varphi_4^{(2)}, k_4) - Z(\varphi_4^{(1)}, k_4) \{]. \end{aligned} \right.$$

Or, les hypothèses et notations spéciales au présent Mémoire, savoir celles exprimées par les égalités (10) du § I, donnant en particulier

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} & l^2 - s_2 = -m^2x^2, \\ & n^2 + s_2 = n^2 + (l^2 + m^2x^2) = -m^2 + m^2x^2 = -m^2(1-x^2), \\ & \varpi + n^2 + s_2 = m^2(1-g^2) - m^2(1-x^2) = -m^2(g^2 - x^2), \\ & (l^2 - s_2)(n^2 + s_2)(\varpi + n^2 + s_2) = -m^2x^2[-m^2(1-x^2)][-m^2(g^2-x^2)] \\ & \qquad = -m^6x^2(1-x^2)(g^2-x^2), \\ & l^2 - t_2 = -m^2(g^2 - k^2), \\ & n^2 + t_2 = n^2 + [l^2 + m^2(g^2 - k^2)] = -m^2 + m^2(g^2 - k^2) \\ & \qquad = -m^2(g'^2 + k^2), \\ & \varpi + n^2 + t_2 = m^2g'^2 - m^2(g'^2 + k^2) = -m^2k^2, \\ & (l^2 - t_2)(n^2 + t_2)(\varpi + n^2 + t_2) = -m^2(g^2-k^2).[-m^2(g'^2+k^2)](-m^2k^2) \\ & \qquad = -m^6k^2(g^2 - k^2)(g'^2 + k^2), \end{aligned} \right.$$

il résulte donc, tant de ces hypothèses (10) que de ces dernières valeurs jointes à la définition précédente (48) du symbole $\overline{E}$, que les quatre coefficients algébriques des fonctions elliptiques correspondant aux quatre déterminations de ϵ auront, dans la question actuelle, respectivement pour expressions

$$(52)\quad \begin{cases} \overline{S}_1 = \sqrt{(l^2 - s_1)(n^2 + s_1)(\varpi + n^2 + s_1)} = 0, \\ \overline{S}_2 = \sqrt{(l^2 - s_2)(n^2 + s_2)(\varpi + n^2 + s_2)} = im^3 x \sqrt{1-x^2}\sqrt{g^2-x^2}, \\ \overline{T}_1 = \sqrt{(l^2 - t_1)(n^2 + t_1)(\varpi + n^2 + t_1)} = 0, \\ \overline{T}_2 = \sqrt{(l^2 - t_2)(n^2 + t_2)(\varpi + n^2 + t_2)} = im^3 k \sqrt{g^2-k^2}\sqrt{g^2+k^2}; \end{cases}$$

de telle sorte que la valeur ci-dessus (60) de $I^{(0)}$ se réduira tout d'abord aux deux seuls termes

$$(53)\quad \begin{cases} I^{(0)} = -2m^3 x \sqrt{1-x^2}\sqrt{g^2-x^2}\,[Z(\varphi_2^{(2)}, k_2) - Z(\varphi_2^{(1)}, k_2)] \\ \qquad + 2m^3 k \sqrt{g^2-k^2}\sqrt{g^2+k^2}\,[Z(\varphi_4^{(2)}, k_4) - Z(\varphi_4^{(1)}, k_4)], \end{cases}$$

les valeurs des six éléments k_2, $\varphi_2^{(1)}$, et $\varphi_2^{(2)}$ d'une part, et k_4, $\varphi_4^{(1)}$, et $\varphi_4^{(2)}$ d'autre part, étant celles déjà envisagées dans le § I de ce travail, c'est-à-dire celles fournies respectivement par les formules (II), (IV) et (14) (p. 12), lesquelles représentent, comme on l'a vu, ce que deviennent, avec les hypothèses et les notations actuelles, les valeurs indiquées par les groupes correspondants (II) et (IV) du tableau A (p. 65) de notre Chapitre I.

Or, il résulte immédiatement des valeurs précitées (14) des deux arguments $\varphi_2^{(1)}$ et $\varphi_4^{(1)}$, qu'en sous-entendant les indices, tant inférieurs que supérieurs, ainsi que les modules, chacune des deux parenthèses de l'expression précédente de $I^{(0)}$ sera de la forme

$$Z(\varphi) - Z(K + iK')$$
$$= Z[\varphi - (K + iK')] + k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}(K + iK') \operatorname{sn}[\varphi - (K + iK')]$$

en vertu de la formule connue d'addition de la fonction elliptique de deuxième espèce (*) : c'est-à-dire, en faisant attention que l'on a

$$(54)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}[\varphi - (K + iK')] = \operatorname{sn}[(\varphi + K + iK') - 2K - 2iK'] \\ \qquad = -\operatorname{sn}(\varphi + K + iK') = -\dfrac{\operatorname{dn}\varphi}{k \operatorname{cn}\varphi}, \end{cases}$$

(*) En effet, la dite formule, savoir

$$Z(x + \alpha) = Z(x) + Z(\alpha) + k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}(x + \alpha),$$

donne d'abord, en y changeant α en $-\alpha$, la fonction *sn* étant impaire,

$$Z(x - \alpha) = Z(x) - Z(\alpha) - k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}(x - \alpha),$$

puis de là :

$$Z(x) - Z(\alpha) = Z(x - \alpha) + k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}(x - \alpha).$$

que les différences en question seront l'une et l'autre de la forme

$$(55)\quad \begin{cases} Z(\varphi) - Z(K + iK') = Z[\varphi - (K + iK')] + k^2 \operatorname{sn}\varphi . \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{-\operatorname{dn}\varphi}{k \operatorname{cn}\varphi} \\ \qquad\qquad = Z[\varphi - (K + iK')] - \dfrac{\operatorname{sn}\varphi \operatorname{dn}\varphi}{\operatorname{cn}\varphi}, \end{cases}$$

et par conséquent, en termes explicites, qu'elles auront respectivement pour expressions

$$(56)\quad Z[\varphi_2^{(2)} - (K_2 + iK_2')] - \frac{\operatorname{sn}(\varphi_2^{(2)}, k_2) \operatorname{dn}(\varphi_2^{(2)}, k_2)}{\operatorname{cn}(\varphi_2^{(2)}, k_2)}$$

et

$$(57)\quad Z[\varphi_4^{(2)} - (K_4 + iK_4')] - \frac{\operatorname{sn}(\varphi_4^{(2)}, k_4) \operatorname{dn}(\varphi_4^{(2)}, k_4)}{\operatorname{cn}(\varphi_4^{(2)}, k_4)}.$$

Nous avons déjà envisagé les divers éléments qui figurent dans ces deux expressions et calculé leurs valeurs dans le § I ci-dessus. En effet, quant aux seconds termes, composés de fonctions de première espèce seulement, si nous les désignons respectivement par Θ_2 et Θ_1, les égalités (19) et (23) nous donneront, en changeant dans la première expression le signe de deux facteurs,

$$(58)\quad \begin{cases} \Theta_1 = \dfrac{\operatorname{sn}(\varphi_4^{(2)}, k_4) \operatorname{dn}(\varphi_4^{(2)}, k_4)}{\operatorname{cn}(\varphi_4^{(2)}, k_4)} = \sqrt{\dfrac{(x^2 - k^2)\, x^2}{(1 - x^2)\, k^2}} \\ \qquad\qquad = \dfrac{x}{k} \dfrac{\sqrt{x^2 - k^2}}{\sqrt{1 - x^2}}, \\ \Theta_2 = \dfrac{\operatorname{sn}(\varphi_2^{(2)}, k_2) \operatorname{dn}(\varphi_2^{(2)}, k_2)}{\operatorname{cn}(\varphi_2^{(2)}, k_2)} = \sqrt{\dfrac{(x^2 - k^2)(g^2 - k^2)}{(g^2 - x^2)(g'^2 + k^2)}} \\ \qquad\qquad = \dfrac{\sqrt{x^2 - k^2}}{\sqrt{g^2 - x^2}} \dfrac{\sqrt{g^2 - k^2}}{\sqrt{g'^2 + k^2}}; \end{cases}$$

et quant aux fonctions de deuxième espèce, leurs arguments sont encore exactement les mêmes que les arguments correspondants des fonctions de troisième espèce de l'expression (25), lesquelles provenaient dans le calcul précité d'une transformation analogue.

Donc en résumé, si nous convenons de désigner, ainsi que nous avons fait alors, par φ_2 l'argument de la nouvelle fonction ellip-

tique pour la première parenthèse, que nous venons de mettre sous la forme (56), et de même par φ_1 celui de la seconde parenthèse ramenée semblablement à la forme (57), en ayant soin d'écrire en même temps, pour la symétrie, k_1 à la place de k_4, ces deux parenthèses s'écriront alors respectivement

$$Z(\varphi_2, k_2) - \Theta_2 \qquad \text{et} \qquad Z(\varphi_1, k_1) - \Theta_1,$$

les quatre éléments φ_1, k_1; φ_2, k_2 étant précisément ceux définis par les équations (28) connexes de la formule qui fait l'objet de notre Théorème I. — Et par conséquent l'expression obtenue ci-dessus (53) pour notre intégrale actuelle $I^{(0)}$ sera elle-même, avec les hypothèses et les notations du présent Mémoire

$$(59)\quad \left\{ \begin{aligned} I^{(0)} = &- 2m^3 x \sqrt{(1-x^2)(g^2-x^2)}\,[Z(\varphi_2, k_2) - \Theta_2] \\ &+ 2m^3 k \sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}\,[Z(\varphi_1, k_1) - \Theta_1]. \end{aligned} \right.$$

Tel est donc le résultat auquel conduit, pour le calcul de l'intégrale double actuellement envisagée (37), le remplacement du système de variables s et t par le nouveau système de variables ω et θ introduit par les équations (35) de notre Chapitre I pour un objet tout semblable. Mais en conservant le système des variables proposées s et t, ou en termes plus précis, en employant de nouveau les variables x et k qui dépendent séparément de chacune d'elles, on arrive ainsi à un résultat de forme très différente, dont la comparaison avec le précédent nous fournira encore la nouvelle formule annoncée.

En effet, ayant, comme nous l'avons déjà trouvé, parmi les égalités (3), avec les variables x et k et les constantes g et g', définies par les équations (1) et (2),

$$(60)\qquad s + t + \varpi - f = - m^2 (k^2 - x^2),$$

nous en conclurons immédiatement pour la question actuelle

$$\begin{aligned} 3(s + t - f) + 2\varpi &= 3(s + t + \varpi - f) - \varpi \\ &= - 3m^2 (k^2 - x^2) - m^2 g'^2 \\ &= - m^2 [g'^2 + 3(k^2 - x^2)]; \end{aligned}$$

et dès lors, en tenant compte de l'égalité (5), l'on voit que l'élément de l'intégrale double actuellement envisagée (37) sera ainsi, étant exprimé à l'aide des variables et constantes précitées,

$$(60^{bis})\left\{\begin{array}{l} -\,m^2\,[g'^2+3\,(k^2-x^2)]\,.\,im\,(x^2+k^2-g^2)\,\dfrac{dx}{\sqrt{X}}\,\dfrac{2k\,dk}{\sqrt{K}} \\ =\,im^3\,[(g'^2+3k^2)-3x^2]\,[(g^2-k^2)-x^2]\,\dfrac{dx}{\sqrt{X}}\,\dfrac{2k\,dk}{\sqrt{K}} \\ =\,im^3\,[(g'^2+3k^2)(g^2-k^2)-\{3\,(g^2-k^2)+(g'^2+3k^2)\}\,x^2+3x^4]\,\dfrac{dx}{\sqrt{X}}\,\dfrac{2k\,dk}{\sqrt{K}}\,; \end{array}\right.$$

et, par conséquent, l'intégrale double elle-même aura alors pour expression :

$$(61)\quad I^{(0)}=im^3\int_g^k\int_0^x[(g^2-k^2)(g'^2+3k^2)-(g'^2+3g^2)x^2+3x^4]\,\frac{dx}{\sqrt{X}}\,\frac{2k\,dk}{\sqrt{K}}\,.$$

Cela posé, pour effectuer la première intégration en x, déduisant successivement de notre définition (4) du symbole X

$$(62)\quad\left\{\begin{array}{l} X=(1-x^2)\,(k^2-x^2)=k^2-(1+k^2)\,x^2+x^4, \\ X'=-\,(1+k^2)\,.\,2x+4x^3, \\ \dfrac{d\,(x\sqrt{X})}{dx}=\sqrt{X}+x\,\dfrac{X'}{2\sqrt{X}}=\dfrac{X+x\,.\,\frac{1}{2}\,X'}{\sqrt{X}} \\ \qquad\qquad =\dfrac{1}{\sqrt{X}}\,[k^2-2\,(1+k^2)\,x^2+3x^4], \end{array}\right.$$

nous conclurons d'abord de cette dernière suite d'égalités, en n'en considérant que les membres extrêmes et la multipliant par dx, puis intégrant entre les limites 0 et x, la formule de réduction

$$x\sqrt{X}=k^2\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{X}}-2\,(1+k^2)\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}+3\int_0^x\frac{x^4\,dx}{\sqrt{X}}\,,$$

de laquelle nous tirerons :

$$(63)\quad 3\int_0^x\frac{x^4\,dx}{\sqrt{X}}=x\sqrt{X}-k^2\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{X}}+2\,(1+k^2)\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}\,.$$

Dès lors, nous trouverons sans peine, pour la quadrature en x de l'intégrale double ci-dessus (61),

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_0^x [(g^2-k^2)(g'^2+3k^2)-(g'^2+3g^2)x^2+3x^4]\frac{dx}{\sqrt{X}}\\
&=(g^2-k^2)(g'^2+3k^2)\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{X}}-(g'^2+3g^2)\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}+3\int_0^x\frac{x^4\,dx}{\sqrt{X}}\\
&=(g^2-k^2)(g'^2+3k^2)\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{X}}-(g'^2+3g^2)\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}\\
&\quad+\left[x\sqrt{X}-k^2\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{X}}+2(1+k^2)\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}\right]\\
&\quad=x\sqrt{X}+\psi_2(k^2)\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{X}}-\psi_1(k^2)\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}},
\end{aligned}\right.$$

en désignant, après réduction, par $\psi_1(k^2)$ et $\psi_2(k^2)$ les deux polynômes en k^2, dont l'indice marque le degré :

$$(65)\quad \left\{\begin{aligned}
\psi_1(k^2)&=(g'^2+3g^2)-2(1+k^2)=\{(1-g^2)+3g^2\}-2(1+k^2)\\
&=-(1-2g^2)-2k^2,\\
\psi_2(k^2)&=(g^2-k^2)(g'^2+3k^2)-k^2=\{g^2g'^2+(3g^2-g'^2)k^2-3k^4\}-k^2\\
&=g^2g'^2+\{3g^2-(1-g^2)-1\}k^2-3k^4\\
&=g^2g'^2-2(1-2g^2)k^2-3k^4.
\end{aligned}\right.$$

En introduisant donc le résultat que nous venons de trouver (64) pour la quadrature en x dans l'expression ci-dessus (61) de l'intégrale double proposée, celle-ci deviendra

$$I^{(0)}=im^3\int_g^k\left[x\sqrt{X}+\psi_2(k^2)\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{X}}-\psi_1(k^2)\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}\right]\frac{2k\,dk}{\sqrt{X}},$$

c'est-à-dire, en remplaçant à présent, comme dans le § I, les quadratures en x par leurs expressions (8), puis développant :

$$(66)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{I}^{(0)} = im^3 \Big[&\int_g^k x\sqrt{\mathrm{X}}\,\frac{2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}} + \int_g^k \mathrm{F}_1\Big(\frac{x}{k},\, k\Big)\,\psi_2(k^2)\,\frac{2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}} \\ &- \int_g^k \mathrm{F}_2\Big(\frac{x}{k},\, k\Big)\psi_1(k^2)\,\frac{2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}}\Big]\,. \end{aligned} \right.$$

Il ne reste donc plus qu'à calculer la première de ces trois intégrales en k, laquelle est une fonction elliptique de deuxième espèce, ainsi qu'on l'aperçoit immédiatement en faisant $k^2 = y$; et cela fait, en égalant alors l'expression de $\mathrm{I}^{(0)}$ ainsi obtenue à la précédente (59), on aura de cette façon la formule annoncée. Mais pour effectuer le calcul explicite de la dite intégrale, il sera plus commode d'employer le changement de variable que nous allons indiquer, lequel nous conduira très aisément, comme on va le voir, à ce résultat important, à savoir que la dite intégrale reproduit exactement (en tenant compte du coefficient constant im^3) le premier terme de l'expression antérieurement trouvée (59) pour la même quantité $\mathrm{I}^{(0)}$, en sorte que ces deux termes égaux se détruiront dans l'égalité que nous venons de spécifier.

A cet effet, rappelant en premier lieu la première ligne des valeurs ci-dessus (51), ainsi que la définition (et conventions connexes) du symbole E [formule (55) du Chap. I], lesquelles donneront ensemble tout d'abord

$$(67)\quad \mathrm{S}_2 = (l^2 - s_2)(n^2 + s_2) = -\,m^2x^2\,[-\,m^2(1-x^2)] = m^4x^2(1-x^2);$$

puis, en second lieu, la définition de la variable θ [formule (35) du Chap. I], et l'équation (60) ci-dessus, que nous allons récrire ici

$$(67^{bis})\qquad s + t - f = \theta, \qquad s + t + \varpi - f = -\,m^2(k^2 - x^2),$$

lesquelles étant rapprochées, en ayant égard à la valeur (1) de ϖ, établissent entre les variables θ et k les relations

$$(67^{ter})\qquad \theta + m^2g'^2 = -\,m^2(k^2 - x^2),$$

d'où

$$(68)\qquad k^2 = x^2 - g'^2 - \frac{\theta}{m^2}, \qquad \text{et} \qquad 2k\,dk = -\frac{d\theta}{m^2};$$

et exprimant alors la quadrature en question au moyen de la variable θ à la place de la variable k, nous constaterons tout d'abord que les deux limites θ_2 et θ_1 de la première, correspondant à celles k et g de la seconde, à savoir

$$(69)\quad \begin{cases} \theta_2 = \theta = -\,m^2\,(g'^2 + k^2 - x^2) \\ \theta_1 = -\,m^2\,(g'^2 + g^2 - x^2) = -\,m^2\,(1 - x^2), \end{cases}$$

coïncideront dès lors exactement avec celles de l'intégrale en θ qui correspond à la détermination $\epsilon = \epsilon_2 = s_2$ dans la somme (39), car ces dernières limites, définies avec cette hypothèse par les formules (40), ont pour expression, en vertu des valeurs (10) et de la définition de f [formule (14) du Chap. I],

$$(70)\quad \begin{cases} \theta_1 = s_2 + t_1 - f = (l^2 + m^2x^2) + l^2 - (l^2 - n^2) \\ \qquad = (l^2 + n^2) + m^2x^2 = -\,m^2\,(1 - x^2), \\ \theta_2 = s_2 + t_2 - f = (l^2 + m^2x^2) + [l^2 + m^2\,(g^2 - k^2)] - (l^2 - n^2) \\ \qquad = (l^2 + n^2) + m^2x^2 + m^2\,(g^2 - k^2) \\ \qquad = -\,m^2\,(1 - g^2) + m^2\,(x^2 - k^2) = -\,m^2\,(g'^2 + k^2 - x^2). \end{cases}$$

Cela posé, s'écrivant d'abord l'équation (67$^{\text{ter}}$) ainsi qu'il suit :

$$(70^{\text{bis}})\qquad m^2\,(k^2 - x^2) = -\,(m^2g'^2 + \theta) = -\,(\varpi + \theta),$$

puis déduisant successivement de l'expression (68) de k^2 et toujours des mêmes valeurs (10),

$$(71)\quad \begin{cases} \qquad g'^2 + k^2 = x^2 - \dfrac{\theta}{m^2}, \\ \text{d'où} \quad m^2\,(g'^2 + k^2) = m^2x^2 - \theta = -\,(l^2 - s_2 + \theta), \\ \qquad g^2 - k^2 = 1 - (g'^2 + k^2) = 1 - x^2 + \dfrac{\theta}{m^2}, \\ \text{d'où} \quad m^2\,(g^2 - k^2) = m^2\,(1 - x^2) + \theta = -\,(n^2 + s_2 - \theta), \end{cases}$$

les définitions (4) des quantités X et K donneront dès lors

$$\begin{cases} m^6 X = m^4 (1 - x^2) . m^2 (k^2 - x^2) = m^4 (1 - x^2) . [- (\varpi + \theta)], \\ m^4 K = m^2 (g^2 - k^2) . m^2 (g'^2 + k^2) = (n^2 + s_2 - \theta) (l^2 - s_2 + \theta). \end{cases}$$

d'où en ayant égard à l'égalité (67), et prenant expressément la détermination positive des différents radicaux que nous allons écrire:

$$(72) \quad \begin{cases} m^3 x \sqrt{X} = x \sqrt{m^6 X} = x . m^2 \sqrt{1 - x^2} \, [\pm i \sqrt{\varpi + \theta}] \\ \qquad = \sqrt{S_2} \, (\pm i \sqrt{\varpi + \theta}), \end{cases}$$

$$(73) \qquad m^2 \sqrt{K} = \sqrt{(l^2 - s_2 + \theta) (n^2 + s_2 - \theta)}.$$

Or, le signe qu'on doit prendre devant l'imaginaire i dans la première expression n'est point arbitraire, mais il est commandé ici, comme on va le voir, par un calcul antérieur. En effet, bien que ce symbole i représente par définition indifféremment $+\sqrt{-1}$ ou $-\sqrt{-1}$, il est bien évident que la détermination que l'on aura adoptée arbitrairement pour sa signification à l'origine d'un calcul restera forcément la même pour toute la suite de ce calcul.

Or, ayant fait intervenir, pour écrire la suite d'égalités (60bis), l'égalité antérieure (5) du § I, le signe qu'il faudra prendre dans ce calcul en extrayant de nouveau la racine de l'égalité (60) ou (67bis) est donc forcément celui que nous avons adopté dans la dite égalité (5), alors que nous y avons pris

$$\sqrt{s + t + \varpi - f} = + im \sqrt{k^2 - x^2},$$

ce qui revient à faire, en multipliant par $-i$ puis ayant égard encore à la définition (67bis) de θ,

$$(74) \quad m \sqrt{k^2 - x^2} = - i \sqrt{s + t + \varpi - f} = - i \sqrt{\varpi + \theta} \; ;$$

d'où il suit que l'égalité ci-dessus (72) doit s'écrire, sans ambiguïté autre que celle inhérente à la signification du symbole i :

$$(75) \qquad m^3 x \sqrt{X} = - i \sqrt{S_2} \sqrt{\varpi + \theta}.$$

En tenant compte alors de ces deux valeurs (75) et (73), ainsi que de celle (68) de $2k\,dk$, le premier terme en question de la nouvelle expression (66) de $I^{(0)}$ sera donc, avec la précision que nous venons de dire

$$(76)\quad \left\{\begin{aligned} & im^3\int_g^k x\sqrt{\mathrm{X}}\,\frac{2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}} = i\int_g^k m^3 x\sqrt{\mathrm{X}}\,\frac{m^2.\,2k\,dk}{m^2\sqrt{\mathrm{K}}} \\ &= i\int_{\theta_1}^{\theta_2}(-i\sqrt{\mathrm{S}_2}\sqrt{\varpi+\theta})\,\frac{-\,d\theta}{\sqrt{(l^2-s_2+\theta)(n^2+s_2-\theta)}} \\ &= -\sqrt{\mathrm{S}_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\sqrt{\varpi+\theta}}{\sqrt{l^2-s_2+\theta}\,\sqrt{n^2+s_2-\theta}}\,d\theta, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire exactement, eu égard à la signification convenue du double signe qui figure dans l'expression primitive (39) de $I^{(0)}$ (Chap. I, p. 45), le second terme de la dite somme, savoir celui correspondant à la détermination $\epsilon = \epsilon_2 = s_2$, lequel terme représente bien à lui seul, comme il ressort du calcul ci-dessus, le premier des deux termes de l'expression postérieure (59) de la même quantité $I^{(0)}$.

Le terme en question disparaîtra donc bien, ainsi que nous l'avons annoncé de l'égalité à provenir de la comparaison des deux expressions successives (59) et (66) de $I^{(0)}$, laquelle égalité se réduira dès lors à la suivante

$$im^3\left[\int_g^k \mathrm{F}_1\left(\frac{x}{k},\,k\right)\psi_2(k^2)\,\frac{2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}} - \int_g^k \mathrm{F}_2\left(\frac{x}{k},\,k\right)\psi_1(k^2)\,\frac{2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}}\right] = 2m^3k\sqrt{\mathrm{K}}\,[\mathrm{Z}(\varphi_1, k_1) - \Theta_1],$$

ou, en multipliant par $\frac{i}{m^3}$ et intervertissant simplement les deux termes de chaque membre,

$$(77)\quad \int_g^k \mathrm{F}_2\left(\frac{x}{k},\,k\right)\psi_1(k^2)\,\frac{2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}} - \int_g^k \mathrm{F}_1\left(\frac{x}{k},\,k\right)\psi_2(k^2)\,\frac{2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}} = -\,2ik\sqrt{\mathrm{K}}\,[\Theta_1 - \mathrm{Z}(\varphi_1, k_1)],$$

c'est-à-dire enfin, eu égard à la signification des symboles K (4) et Θ_1 (58),

$$(78)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{\psi_1(k^2).\,2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}} - \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{\psi_2(k^2).\,2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}} \\ &= -2i\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}\left[\frac{x\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}} - k\,Z(\varphi_1, k_1)\right], \end{aligned} \right.$$

les symboles $\psi_1(k^2)$ et $\psi_2(k^2)$ tenant lieu des polynômes (65) en k^2, et les éléments φ_1 et k_1 étant les mêmes que dans la formule analogue du Théorème I (p. 19).

On pourra sans grande peine, si l'on veut, vérifier encore cette formule *a posteriori* par la seule différentiation, au moyen d'un calcul analogue à celui mentionné plus haut (p. 24) pour notre Théorème I (*), mais cette fois bien plus simple et beaucoup plus facile.

Avant de formuler de nouveau en théorème le résultat auquel nous venons d'arriver, il nous sera utile pour la suite de ce travail de donner encore au second membre de la dite formule (78) une seconde forme composée d'éléments exclusivement réels, en introduisant, à la place des éléments φ_1 et k_1, les deux fonctions $F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)$ et $F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)$ elles-mêmes, ainsi que nous l'avons déjà fait dans le même but à l'occasion de la formule limite (36) ou (35) du Corollaire du Théorème I.

A cet effet, convenant de désigner par J le second membre en question, c'est-à-dire posant par conséquent

$$(79)\quad J = -2ik\sqrt{K}\,[\Theta_1 - Z(\varphi_1, k_1)] = 2ik\sqrt{K}\,[Z(\varphi_1, k_1) - \Theta_1],$$

si nous faisons de plus, pour abréger l'écriture,

$$(80)\qquad Z_1 = Z(\varphi_1, k_1) = \int_0^{\varphi_1} k_1^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi_1, k_1)\,d\varphi_1,$$

(*) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, T. XXI (1896-1897), 1re Partie, pp. 120-126.

nous aurons donc, quant à ce second membre :

$$(81) \qquad J = 2ik(Z_1 - \Theta_1), \qquad \frac{\delta J}{\delta x} = 2ik\sqrt{K}\left(\frac{\delta Z_1}{\delta x} - \frac{\delta \Theta_1}{\delta x}\right).$$

Or, comme, en empruntant à la suite d'égalités (33) du § I le premier et l'avant-dernier membre seulement, on aura

$$\varphi_1 = ik\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad \frac{\delta \varphi_1}{\delta x} = \frac{ik}{\sqrt{X}},$$

on trouve donc, d'une part, pour le premier des deux termes, à l'intérieur de la parenthèse, de la seconde expression précédente, en ayant égard aux définitions (28) :

$$(82) \quad \frac{\delta Z_1}{\delta x} = k_1^2 \operatorname{sn}^2(\varphi_1, k_1)\frac{\delta \varphi_1}{\delta x} = \frac{1-k^2}{-k^2}\frac{-x^2}{1-x^2}\frac{ik}{\sqrt{X}} = \frac{i}{k}\frac{(1-k^2)x^2}{(1-x^2)\sqrt{X}}.$$

D'autre part, quant au second terme, en prenant

$$\sqrt{k^2 - x^2} = \sqrt{-(x^2 - k^2)} = i\sqrt{x^2 - k^2},$$

d'où

$$\sqrt{x^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - x^2},$$

la définition (58) de Θ_1, en ayant égard à celle (4) de X, donnera successivement

$$\Theta_1 = \frac{x}{k}\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-i}{k}\frac{x\sqrt{k^2-x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{\delta \Theta_1}{\delta x} = \frac{-i}{k}\left(\frac{\sqrt{k^2-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{-x}{\sqrt{k^2-x^2}} + x\sqrt{k^2-x^2}\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= \frac{-i}{k}\left(\frac{k^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{k^2-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{k^2-x^2}} + \frac{x^2}{1-x^2}\frac{k^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{k^2-x^2}}\right)$$

$$= \frac{-i}{k\sqrt{X}}\left[(k^2-x^2) + x^2\left(-1 + \frac{k^2-x^2}{1-x^2}\right)\right] = \frac{-i}{k}\frac{k^2 - 2x^2 + x^4}{(1-x^2)\sqrt{X}}.$$

Avec cette valeur et la précédente (82), la dérivée $\frac{\delta J}{\delta x}$ (81) deviendra donc

$$\frac{\delta J}{\delta x} = 2ik\sqrt{K}\left(\frac{i}{k}\frac{(1-k^2)x^2}{(1-x^2)\sqrt{X}} + \frac{i}{k}\frac{k^2-2x^2+x^4}{(1-x^2)\sqrt{X}}\right)$$

$$= -2\sqrt{K}\frac{(1-k^2)x^2+(k^2-2x^2+x^4)}{(1-x^2)\sqrt{X}} = -2\sqrt{K}\frac{k^2-(1+k^2)x^2+x^4}{(1-x^2)\sqrt{K}}$$

$$= -2\sqrt{K}\frac{(1-x^2)(k^2-x^2)}{(1-x^2)\sqrt{X}} = -2\sqrt{K}\frac{k^2-x^2}{\sqrt{X}},$$

valeur qui, étant multipliée par dx et intégrée de 0 à x, donnera alors, en ayant égard aux interprétations (8), pour nouvelle expression de la même quantité, J :

$$(83)\qquad \left\{\begin{array}{l} J = -2\sqrt{K}\left[k^2\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} - \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}\right. \\ \qquad = -2\sqrt{K}\left[k^2 F_1\left(\frac{x}{k}, k\right) - F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\right]. \end{array}\right.$$

La constante d'intégration est ici nulle, car si l'on fait $x = 0$, d'une part, le second membre est manifestement nul, et d'autre part le premier membre J l'est aussi, en vertu de sa définition (79), jointe à celles (58) de Θ_1, attendu que $\mathrm{sn}(\varphi_1, k_1)$ l'est lui-même d'après sa définition (28). Et en introduisant dès lors dans la formule proposée (78) cette nouvelle expression de son second membre, on aura de cette façon la seconde forme exclusivement réelle de la même formule que nous voulions signaler à l'attention du Lecteur.

Comme conclusion de ce paragraphe, nous pouvons donc de nouveau formuler le Théorème suivant que nous y avons démontré rigoureusement par les calculs qui précèdent :

Théorème II. — *Les mêmes definitions, tant pour les symboles de fonctions* F_1 *et* F_2 *que pour les éléments* φ_1, k_1, *et* φ_2, k_2, *étant admises que dans le Théorème I précédent, si l'on représente en*

outre par ψ_1 *et* ψ_2 *les deux polynômes du premier et du second degré en* k^2,

$$(84)\quad \begin{cases} \psi_1(k^2) = -(1-2g^2) - 2k^2, \\ \psi_2(k^2) = g^2(1-g^2) - 2(1-2g^2)k^2 - 3k^4, \end{cases}$$

l'on aura la nouvelle formule de quadrature

$$(85)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{\psi_1(k^2).2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}} - \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{\psi_2(k^2).2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}} \\ \quad = -2i\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}\left[\dfrac{x\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}} - k\,Z(\varphi_1, k_1)\right], \end{cases}$$

que l'on pourra également présenter sous cette autre forme entièrement réelle :

$$(86)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{\psi_1(k^2).2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}} - \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{\psi_2(k^2).2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}} \\ \quad = 2\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}\left[F_2\left(\dfrac{x}{k}, k\right) - k^2 F_1\left(\dfrac{x}{k}, k\right)\right]. \end{cases}$$

III

Considérons à présent le nouveau type d'intégrale double

$$(87)\quad J^{(0)} = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{(s-t)[2st - m^2(s+t-f)]}{\sqrt{s+t+\varpi-f}}\,\frac{ds}{\sqrt{S}}\,\frac{dt}{\sqrt{T}},$$

dans l'élément duquel entre le produit st, tandis qu'il n'intervenait pas dans ceux des deux types envisagés respectivement dans les §§ I et II précédents, et transformons-le encore à l'aide des mêmes variables ω et θ définies par les équations (35) du Chapitre I. Toutefois, dans la seconde de ces équations, la constante g^2 qui représente, d'après la définition (14) du même Chapitre le produit l^2n^2, pourra, tant en vue d'éviter ici la confusion des notations que de simplifier les calculs, être supposée nulle, puisque les trois constantes l^2, m^2, n^2 n'étant liées, en vertu de leur définition même [formules (4) du Chap. I] que par la seule relation $l^2 + m^2 + n^2 = 0$, l'on peut toujours à volonté admettre l'une des deux hypothèses $l^2 = 0$ ou bien $n^2 = 0$ (*).

Supposant donc $l^2 = 0$, et ayant ainsi à la fois par les égalités (5) et (14) précitées, puis (39) du dit Chapitre I,

$$(88)\quad l^2 = 0, \quad m^2 = -n^2, \quad f = -n^2 = m^2, \quad g^2 = 0,$$

$$(89)\quad st = \omega, \qquad \Omega = \omega(\omega + n^2\theta) = \omega^2 - m^2\theta.\,\omega,$$

l'intégrale double ci-dessus deviendra, étant exprimée en ω et θ, toujours en vertu des mêmes équations (35), (37) et (38^{bis}) du même

---

(*) Mais non pas la troisième hypothèse analogue $m^2 = 0$, car les formules (10) donnant alors $s_1 = s_2 = l^2$, $t_1 = t_2 = l^2$, nos trois intégrales doubles I, $I^{(0)}$, et $J^{(0)}$, successivement considérées seraient alors identiquement nulles, ainsi que toutes les autres que nous envisagerons dans la suite de ce travail.

Chapitre, et en omettant pour un instant l'indication des nouvelles limites,

$$J^{(0)} = \frac{1}{2}\iint \frac{(s-t)\,(2\omega - m^2\theta)}{\sqrt{\theta+\varpi}}\,\frac{\pm\,\delta\,(s,t)}{\delta\,(\omega,\theta)}\,\frac{d\omega\,d\theta}{\sqrt{\Omega}}$$
$$= \int\Big(\int \frac{2\omega - m^2\theta}{2\sqrt{\Omega}}\,d\omega\Big)\frac{d\theta}{\sqrt{\theta+\varpi}} = \int\Big(\int \frac{d.\sqrt{\Omega}}{d\omega}\,d\omega\Big)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}},$$

puis, en introduisant les limites en question de la même façon que pour les intégrales doubles I et $I^{(0)}$ précédemment calculées :

$$(90)\qquad J^{(0)} = \sum_{\epsilon} \pm \int_{\epsilon+\eta_1-f}^{\epsilon+\eta_2-f} [\sqrt{\Omega}]_{\Theta}^{E+\epsilon\theta}\,\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}.$$

Or, si l'on se reporte, toujours dans le même Chapitre, aux définitions (39) et (53) des symboles Ω et E, et en même temps dans le § II précédent à celle (42) du symbole $\Delta\theta$, la valeur que prend le trinôme Ω pour $\omega = E + \epsilon\theta$ pourra s'écrire en général au moyen de ces symboles

$$\begin{aligned}
&[(E+\epsilon\theta) - l^2\theta]\,[(E+\epsilon\theta) + n^2\theta]\\
&= [E - (l^2-\epsilon)\,\theta]\,[E + (n^2+\epsilon)\,\theta]\\
&= (l^2-\epsilon)\,[(n^2+\epsilon) - \theta].\,(n^2+\epsilon)\,[(l^2-\epsilon) + \theta]\\
&= (l^2-\epsilon)\,(n^2+\epsilon).\,(l^2-\epsilon+\theta)\,(n^2+\epsilon-\theta)\\
&= E\,\frac{(\Delta\theta)^2}{\varpi+\theta},
\end{aligned}$$

et par conséquent on aura de même, en général,

$$[\sqrt{\Omega}]_{\Theta}^{E+\epsilon\theta} = \sqrt{E}\,\frac{\Delta\theta}{\varpi+\theta} - \sqrt{(\Theta - l^2\theta)\,(\Theta + n^2\theta)},$$

c'est-à-dire, dans la question actuelle, eu égard à l'hypothèse (88) :

$$(91)\qquad [\sqrt{\Omega}]_{\Theta}^{E+\epsilon\theta} = \sqrt{E}\,\frac{\Delta\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}} - \sqrt{\Theta\,(\Theta - m^2\theta)}.$$

Avec cette expression, la valeur précédente (90) de $J^{(0)}$ sera, en introduisant de nouveau pour les limites de θ les notations (40),

$$J^{(0)} = \sum_{\epsilon} \pm \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\sqrt{E}\, \frac{\Delta\theta}{\sqrt{\varpi + \theta}} - \sqrt{\Theta(\Theta - m^2\theta)} \right] \frac{d\theta}{\sqrt{\varpi + \theta}},$$

c'est-à-dire simplement, en vertu du Théorème des pages 60-61 de notre Chapitre I déjà tant de fois invoqué :

$$J^{(0)} = \sum_{\epsilon} \pm \sqrt{E} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\Delta\theta}{\varpi + \theta}\, d\theta. \tag{92}$$

Cela posé, pour calculer l'intégrale définie qui figure dans cette expression, introduisant de nouveau, comme dans le § II, les éléments φ et k définis par les équations (74) du Chapitre I, les égalités (42), (44) et (45) du présent travail nous donneront, quant à l'intégrale indéfinie tout d'abord,

$$\left\{ \begin{aligned} \int \frac{\Delta\theta.\, d\theta}{\varpi + \theta} &= \int \frac{(\Delta\theta)^2}{\varpi + \theta} \frac{d\theta}{\Delta\theta} = \int \frac{-\,NL^2\, \mathrm{sn}^2\varphi\, \mathrm{cn}^2\varphi\, \mathrm{dn}^2\varphi}{L\, \mathrm{sn}^2\varphi} \frac{2\, d\varphi}{i\sqrt{N}} \\ &= 2iL\sqrt{N} \int \mathrm{cn}^2\varphi\, \mathrm{dn}^2\varphi\, d\varphi = 2i\, N^{\frac{3}{2}}.\, k^2 \int \mathrm{cn}^2\varphi\, \mathrm{dn}^2\varphi\, d\varphi. \end{aligned} \right. \tag{93}$$

Or, ayant d'une part

$$\mathrm{cn}^2\varphi\, \mathrm{dn}^2\varphi = (1 - \mathrm{sn}^2\varphi)(1 - k^2\, \mathrm{sn}^2\varphi) = 1 - (1 + k^2)\, \mathrm{sn}^2\varphi + k^2\, \mathrm{sn}^4\varphi,$$

et d'autre part, la formule classique (*)

$$\mathrm{sn}^m\varphi\, \mathrm{cn}\varphi\, \mathrm{dn}\varphi = m \int \mathrm{sn}^{m-1}\varphi\, d\varphi - (m+1)(1+k^2) \int \mathrm{sn}^{m+1}\varphi\, d\varphi + (m+2)\, k^2 \int \mathrm{sn}^{m+3}\varphi\, d\varphi,$$

(*) Nous voulons dire, sous une autre forme, la formule classique

$$\frac{x^m \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{} = m \int \frac{x^{m-1}\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - (m+1)(1+k^2) \int \frac{x^{m+1}\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + (m+2)\, k^2 \int \frac{x^{m+3}\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

dans laquelle on a fait $x = \mathrm{sn}\,\varphi$.

donnant pour $m = 1$, entre les limites 0 et φ,

$$3k^2 \int_0^{\varphi} \mathrm{sn}^4\varphi\, d\varphi = \mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{cn}\varphi\,\mathrm{dn}\varphi - \varphi + 2(1+k^2)\int_0^{\varphi} \mathrm{sn}^2\varphi\, d\varphi,$$

et en multipliant par k^2,

$$(94)\quad 3k^4 \int_0^{\varphi} \mathrm{sn}^4\varphi\, d\varphi = k^2(\mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{cn}\varphi\,\mathrm{dn}\varphi - \varphi) + 2(1+k^2)\,\mathrm{Z}(\varphi),$$

on trouvera donc ainsi successivement

$$3k^2 \int_0^{\varphi} \mathrm{cn}^2\varphi\,\mathrm{dn}^2\varphi\, d\varphi = 3\int_0^{\varphi} k^2[1-(1+k^2)\mathrm{sn}^2\varphi + k^2\,\mathrm{sn}^4\varphi]\, d\varphi$$

$$= 3k^2 \int_0^{\varphi} d\varphi - 3(1+k^2)\int_0^{\varphi} k^2\,\mathrm{sn}^2\varphi\, d\varphi + 3k^4 \int_0^{\varphi} \mathrm{sn}^4\varphi\, d\varphi$$

$$= 3k^2\varphi - 3(1+k^2)\,\mathrm{Z}(\varphi) + [k^2(\mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{cn}\varphi\,\mathrm{dn}\varphi - \varphi) + 2(1+k^2)\,\mathrm{Z}(\varphi)]$$

$$= k^2(\mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{cn}\varphi\,\mathrm{dn}\varphi + 2\varphi) - (1+k^2)\,\mathrm{Z}(\varphi)$$

$$= k^2(\Phi + 2\varphi) - (1+k^2)\,\mathrm{Z}(\varphi),$$

en convenant de faire désormais, pour abréger, avec un indice quelconque (inférieur ou supérieur) pour φ :

$$(95)\qquad \Phi = \mathrm{sn}\varphi\,\mathrm{cn}\varphi\,\mathrm{dn}\varphi.$$

Si nous remettons alors cette dernière valeur au dernier membre des égalités précédentes (93), en adoptant encore pour les limites de φ les mêmes notations que dans le § II (pp. 29 et 30), nous obtiendrons de cette façon pour l'intégrale définie proposée l'expression :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\Delta\theta}{\varpi+\theta}\, d\theta = \frac{2}{3}\, i\mathrm{N}^{\frac{3}{2}}.\, 3k^2 \int_{\varphi^{(1)}}^{\varphi^{(2)}} \mathrm{cn}^2\varphi\,\mathrm{dn}^2\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{2}{3}\, i\mathrm{N}^{\frac{3}{2}}\left[k^2(\Phi + 2\varphi) - (1+k^2)\,\mathrm{Z}(\varphi)\right]_{\varphi^{(1)}}^{\varphi^{(2)}}$$

$$= \frac{2}{3}\, i\mathrm{N}^{\frac{3}{2}}\left[k^2\Phi + \{2k^2\varphi - (1+k^2)\,\mathrm{Z}(\varphi)\}\right]_{\varphi^{(1)}}^{\varphi^{(2)}}.$$

Par suite, en rappelant, d'une part, la définition (48) du symbole $\overline{\mathrm{E}}$ et, d'autre part, les valeurs (52) de ses quatre déterminations successives, l'expression ci-dessus (92) de $\mathrm{J}^{(0)}$ deviendra sous forme condensée

$$(96)\quad \mathrm{J}^{(0)} = \frac{2}{3}\sum_{\epsilon} \pm i\,\mathrm{N}\overline{\mathrm{E}}\left[k^2\Phi + \left\{2k^2\varphi - (1+k^2)\,\mathrm{Z}(\varphi)\right\}\right]_{\varphi_{(1)}}^{\varphi^{(2)}},$$

ou, ce qui est la même chose sous forme explicite, en convenant de représenter respectivement par N_2 et N_4 les valeurs du coefficient N pour chacune des déterminations $\epsilon = \epsilon_2 = s_2$ et $\epsilon = \epsilon_4 = t_2$, c'est-à-dire en désignant ainsi désormais les deux valeurs empruntées au tableau (51),

$$(97)\quad \begin{cases} \mathrm{N}_2 = \varpi + n^2 + s_2 = m^2(x^2 - g^2), \\ \mathrm{N}_4 = \varpi + n^2 + t_2 = -\,m^2k^2, \end{cases}$$

et tenant compte encore de la signification convenue pour le double signe,

$$(98)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{J}^{(0)} = &-\frac{2}{3}i\,\mathrm{N}_2\overline{\mathrm{S}_2}\left[k_2^2\Phi + \left\{2k_2^2\varphi - (1+k_2^2)\,\mathrm{Z}(\varphi,k_2)\right\}\right]_{\varphi_2^{(1)}}^{\varphi_2^{(2)}} \\ &+\frac{2}{3}i\,\mathrm{N}_4\overline{\mathrm{T}_2}\left[k_4^2\Phi + \left\{2k_4^2\varphi - (1+k_4^2)\,\mathrm{Z}(\varphi,k_4)\right\}\right]_{\varphi_4^{(1)}}^{\varphi_4^{(2)}}, \end{aligned}\right.$$

valeur que nous écrirons en abrégé

$$(99)\qquad \mathrm{J}^{(0)} = -\,\Omega_2 + \Omega_4,$$

en faisant encore, pour faciliter les transformations ultérieures (*) :

$$(100)\quad \left\{\begin{aligned} \Omega_2 &= \frac{2}{3}i\,\mathrm{N}_2\overline{\mathrm{S}_2}\left[k_2^2\Phi + \left\{2k_2^2\varphi - (1+k_2^2)\,\mathrm{Z}(\varphi,k_2)\right\}\right]_{\varphi_2^{(1)}}^{\varphi_2^{(2)}}, \\ \Omega_4 &= \frac{2}{3}i\,\mathrm{N}_4\overline{\mathrm{T}_2}\left[k_4^2\Phi + \left\{2k_4^2\varphi - (1+k_4^2)\,\mathrm{Z}(\varphi,k_4)\right\}\right]_{\varphi_4^{(1)}}^{\varphi_4^{(2)}}. \end{aligned}\right.$$

(*) L'exemple du calcul analogue du paragraphe précédent fait aisément prévoir que les fonctions elliptiques au module k_2, qui composent le premier des deux termes de cette dernière expression (99) ou (98), ou le second des précédentes (92) ou (90), se retrouveront également dans l'autre membre de l'équation à intervenir, et donneront lieu dès lors à des réductions qui ne

Occupons-nous d'abord du second de ces deux termes, lequel étant développé sera :

$$(101)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_4 = \dfrac{2}{3} i\, N_4 \overline{T_2}\, [k_4^2 (\Phi_4^{(2)} - \Phi_4^{(1)}) + 2k_4^2 (\varphi_4^{(2)} - \varphi_4^{(1)}) \\ \qquad\qquad - (1 + k_4^2) \{ Z(\varphi_4^{(2)}) - Z(\varphi_4^{(1)}) \{]. \end{array} \right.$$

Alors, si l'on se rappelle la valeur $\varphi_4^{(1)} = K_4 + iK_4'$ que nous avons trouvée dans le § I [formule (14)] et utilisée encore dans le § II, la définition (95) du symbole Φ, rapprochée de celle (58) du symbole Θ_1, nous donnera en premier lieu

$$(102)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_4^{(1)} = \operatorname{sn} \varphi_4^{(1)} \operatorname{cn} \varphi_4^{(1)} \operatorname{dn} \varphi_4^{(1)} = 0, \\ \Phi_4^{(2)} = \operatorname{sn} \varphi_4^{(2)} \operatorname{cn} \varphi_4^{(2)} \operatorname{dn} \varphi_4^{(2)} = \Theta_1 \operatorname{cn}^2 \varphi_4^{(2)}, \end{array} \right.$$

et en second lieu, la différence $Z(\varphi_4^{(2)}) - Z(\varphi_4^{(1)})$, étant la même qui figure déjà au dernier terme de l'expression (53) de $I^{(0)}$, prendra donc encore la forme $Z(\varphi_1, k_1) - \Theta_1$, si nous convenons de faire comme alors (pp. 18 et 17) $k_4 = k_1$ et $\varphi_4^{(2)} - \varphi_4^{(1)} = \varphi_1$, en sorte que, pour tous ces motifs réunis, l'expression précédente (101) deviendra la suivante

$$\begin{aligned} \Omega_4 &= \frac{2}{3} i\, N_4 \overline{T_2}\, [k_1^2 \Theta_1 \operatorname{cn}^2 \varphi_4^{(2)} + 2k_1^2 \varphi_1 - (1 + k_1^2) \{ Z(\varphi_1, k_1) - \Theta_1 \{] \\ &= \frac{2}{3} i\, N_4 \overline{T_2}\, [\{ k_1^2 \operatorname{cn}^2 \varphi_4^{(2)} + (1 + k_1^2) \{ \Theta_1 + \{ 2k_1^2 \varphi_1 - (1 + k_1^2) Z(\varphi_1, k_1) \{], \end{aligned}$$

que nous écrirons alors ainsi

$$(103)\quad \Omega_4 = \frac{2i}{3} [\Delta_4 + N_4 \overline{T_2}\, \{ 2k_1^2 \varphi_1 - (1 + k_1^2) Z(\varphi_1, k_1) \{],$$

en introduisant le symbole Δ_4 pour représenter la partie algébrique en x et k (au facteur constant $\frac{2i}{3}$ près) du développement de la dite quantité, savoir :

$$(104)\qquad \Delta_4 = N_4 \{ k_1^2 \operatorname{cn}^2 \varphi_4^{(2)} + (1 + k_1^2) \{ \overline{T_2}\, \Theta_1.$$

---

s'offriront point à l'occasion du second terme des mêmes expressions. C'est pourquoi chacun de ces deux termes devant ainsi donner lieu à des transformations différentes, il convient, pour en faciliter le calcul, d'introduire un symbole spécial pour chacun d'eux.

Pour avoir l'expression explicite en x et k de cette dernière quantité, les valeurs (58) de Θ_1 et (52) de $\overline{T_2}$ donnant d'abord pour la valeur du produit $\overline{T_2}\,\Theta_1$

$$(104^{bis})\quad \left\{\begin{aligned}\overline{T_2}\,\Theta_1 &= im^3 k\sqrt{g^2-k^2}\,\sqrt{g'^2+k^2}\cdot\frac{x\sqrt{x^2-k^2}}{k\sqrt{1-x^2}}\\ &= im^3\sqrt{K}\,\frac{x\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}},\end{aligned}\right.$$

il suffira dès lors de se reporter ensuite aux valeurs (28) de k_1^2 et (22) de $\mathrm{cn}^2\,\varphi_4^{(2)}$ ainsi qu'à celle (97) de N_4 pour obtenir ainsi successivement quant à l'expression de la dite quantité :

$$(105)\quad \left\{\begin{aligned}\Delta_4 &= (-m^2k^2)\cdot\left[\frac{1-k^2}{-k^2}\,\frac{1-x^2}{1-k^2}+\left(1+\frac{1-k^2}{-k^2}\right)\right]\overline{T_2}\,\Theta_1\\ &= m^2\left[(1-x^2)+\right\}-k^2+(1-k^2)\left\{\right]im^3\sqrt{K}\,\frac{x\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= im^5\left[2\,(1-k^2)-x^2\right]\sqrt{g^2-k^2}\,\sqrt{g'^2+k^2}\,\frac{x\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}\right.$$

Quant au premier terme Ω_2 de l'expression (99) ou (98), nous en déterminerons exactement de la même façon la valeur, mais seulement après réduction, dans l'égalité à intervenir, avec le terme de même nature qui s'introduira dans l'autre membre de la dite égalité que nous allons à présent calculer; à savoir l'expression en x et k de la même intégrale double proposée $J^{(0)}$, ainsi que nous l'avons fait déjà pour établir les deux Théorèmes précédents.

A cet effet, ayant supposé au début du présent paragraphe $l^2=0$, les valeurs de s et t, qui se confondent par hypothèse avec celles de s_2 et t_2, seront donc actuellement, d'après les formules (10),

$$(106)\quad s=m^2x^2\quad\text{et}\quad t=m^2(g^2-k^2),\quad\text{d'où}\quad st=m^4(g^2-k^2)\,x^2,$$

et dès lors, tirant de l'égalité (60) la valeur

$$(107)\quad \left\{\begin{aligned}s+t-f &= -\varpi-m^2(k^2-x^2)\\ &= -m^2g'^2-m^2(k^2-x^2)\\ &= -m^2\left[(g'^2+k^2)-x^2\right],\end{aligned}\right.$$

on voit donc, qu'en tenant compte de l'égalité (5), l'élément de l'intégrale double envisagée (87) deviendra, étant exprimé en x et k à la place de s et t,

$$(108)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\dfrac{(s-t)\,[2st - m^2\,(s+t-f)]}{\sqrt{s+t+\varpi-f}}\,\dfrac{ds}{\sqrt{\mathrm{S}}}\,\dfrac{dt}{\sqrt{\mathrm{T}}} \\ = 2\,[2st - m^2\,(s+t-f)].\,\dfrac{1}{4}\dfrac{s-t}{\sqrt{s+t+\varpi-f}}\,\dfrac{ds}{\sqrt{\mathrm{S}}}\,\dfrac{dt}{\sqrt{\mathrm{T}}} \\ = 2\,\big[2m^4\,(g^2-k^2)\,x^2 + m^4\,\big\}\,(g'^2+k^2) - x^2\,\{\,\big]\,\times \\ \qquad\qquad im\,[x^2-(g^2-k^2)]\,\dfrac{ds}{\sqrt{\mathrm{S}}}\,\dfrac{k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}} \\ = im^5\,[2\lambda x^2 + (\mu - x^2)]\,(x^2-\lambda)\,\dfrac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}\,\dfrac{2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}}, \end{array}\right.$$

en posant, pour en faciliter le calcul,

$$(109)\qquad g^2 - k^2 = \lambda, \qquad g'^2 + k^2 = \mu,$$

d'où

$$(110)\qquad \lambda + \mu = 1, \qquad \mu = 1 - \lambda, \qquad \lambda - \mu = \lambda - (1-\lambda) = 2\lambda - 1.$$

Or, ayant ainsi

$$2\lambda x^2 + (\mu - x^2) = (2\lambda - 1)\,x^2 + \mu = (\lambda - \mu)\,x^2 + \mu,$$

on en déduira

$$\begin{aligned}[2\lambda x^2 + (\mu - x^2)]\,(x^2-\lambda) &= [(\lambda-\mu)\,x^2 + \mu]\,(x^2-\lambda) \\ &= (\lambda-\mu)\,x^4 + \nu x^2 - \lambda\mu,\end{aligned}$$

le coefficient ν, qui est ici une fonction entière de k^2, ayant pour valeur

$$(111)\qquad \left\{\begin{array}{l} \nu = \mu - \lambda\,(\lambda-\mu) = \mu\,(1+\lambda) - \lambda^2 \\ \quad = (1-\lambda)\,(1+\lambda) - \lambda^2 = 1 - 2\lambda^2, \end{array}\right.$$

en sorte que l'élément en question sera ainsi définitivement :

$$(112)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\dfrac{(s-t)\,[2st - m^2\,(s+t-f)]}{\sqrt{s+t+\varpi-f}}\,\dfrac{ds}{\sqrt{\mathrm{S}}}\,\dfrac{dt}{\sqrt{\mathrm{T}}} \\ = im^5\,[(\lambda-\mu)\,x^4 + \nu x^2 - \lambda\mu]\,\dfrac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}\,\dfrac{2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}}. \end{array}\right.$$

Cela étant, l'intégrale double proposée (87) pourra être développée, en intégrant d'abord en x, ainsi qu'il suit

$$J^{(0)} = im^5 \int_g^k \left(\int_0^x [(\lambda - \mu) x^4 + \nu x^2 - \lambda\mu] \frac{dx}{\sqrt{X}} \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} \right.$$

$$= \frac{1}{3} im^5 \int_g^k \left[(\lambda - \mu) . 3 \int_0^x \frac{x^4\,dx}{\sqrt{X}} + 3\nu \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} - 3\lambda\mu \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} \right] \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}},$$

c'est-à-dire, en employant de nouveau la formule de réduction (63) déjà utilisée pour le calcul analogue du paragraphe précédent,

$$J^{(0)} = \frac{1}{3} im^5 \int_g^k \left[(\lambda - \mu) . \left(x\sqrt{X} - k^2 \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} + 2(1 + k^2) \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} \right) \right.$$

$$\left. + 3\nu \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} - 3\lambda\mu \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} \right] \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}}$$

$$= \frac{1}{3} im^5 \int_g^k \left[(\lambda - \mu) x\sqrt{X} + A \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} + B \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} \right] \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}},$$

les nouveaux coefficients A et B étant encore les fonctions entières de k^2,

$$(113) \qquad \begin{cases} A = 2(\lambda - \mu)(1 + k^2) + 3\nu, \\ B = -(\lambda - \mu) k^2 - 3\lambda\mu, \end{cases}$$

auquel cas, si l'on convient de désigner par $\mathfrak{K}$ l'intégrale simple en k

$$(114) \qquad \mathfrak{K} = \frac{1}{3} im^5 \int_g^k (\lambda - \mu) x\sqrt{X} \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}}$$

que nous allons calculer dans un instant, et qu'en outre on remplace encore une fois les quadratures en x par leurs interprétations (8), l'expression considérée de $J^{(0)}$ sera donc en fin de compte :

$$(115) \quad J^{(0)} = \mathfrak{K} + \frac{1}{3} im^5 \left[\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{A . 2k\,dk}{\sqrt{K}} + \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{B . 2k\,dk}{\sqrt{K}} \right].$$

Il convient, avant d'aller plus loin, de développer et d'ordonner les polynômes en k^2 que représentent les quantités A et B (113), introduites tout à l'heure. Or, en ayant égard aux définitions précédentes (109) de λ et μ, ainsi qu'à la valeur (111) de ν, et aux égalités (110), l'on trouvera sans peine, d'abord pour le coefficient A,

$$(116)\quad \left\{\begin{aligned} A &= 2(\lambda-\mu)(1+k^2)+3\nu = 2(-1+2\lambda)(1+g^2-\lambda)+3\nu \\ &= 2\left[-(1+g^2)+\{1+2(1+g^2)\}\lambda-2\lambda^2\right]+3(1-2\lambda^2) \\ &= \{3-2(1+g^2)\}+2(3+2g^2)\lambda-(4+6)\lambda^2 \\ &= (1-2g^2)+(6+4g^2)(g^2-k^2)-10(g^4-2g^2k^2+k^4) \\ &= (1+4g^2-6g^4)-(6-16g^2)k^2-10k^4; \end{aligned}\right.$$

et de même ensuite pour B, en changeant tous les signes :

$$(117)\quad \left\{\begin{aligned} -B &= (\lambda-\mu)k^2+3\lambda\mu = (-1+2\lambda)(g^2-\lambda)+3\lambda(1-\lambda) \\ &= [-g^2+(1+2g^2)\lambda-2\lambda^2]+(3\lambda-3\lambda^2) \\ &= -g^2+\{(1+2g^2)+3\}\lambda-(2+3)\lambda^2 \\ &= -g^2+(4+2g^2)(g^2-k^2)-5(g^4-2g^2k^2+k^4) \\ &= 3g^2(1-g^2)-(4-8g^2)k^2-5k^4. \end{aligned}\right.$$

Reste maintenant à effectuer le calcul de l'intégrale simple en k (114), en calquant en quelque sorte nos procédés sur ceux déjà employés pour le calcul de la quadrature analogue qui formait de même le premier terme de l'expression (66) de $I^{(0)}$ dans le paragraphe précédent.

Or, d'une part, la différentiation de l'expression (76) obtenue pour ce même terme fournira l'égalité

$$(118)\quad \left\{\begin{aligned} im^3 x\sqrt{X}\frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} &= -\sqrt{S_2}\,\frac{\sqrt{\varpi+\theta}\cdot d\theta}{\sqrt{l^2-s_2+\theta}\sqrt{n^2+s_2+\theta}} \\ &= -\sqrt{S_2}\,(\varpi+\theta)\frac{d\theta}{(\Delta\theta)_{s_2}}, \end{aligned}\right.$$

en employant de nouveau le symbole $\Delta\theta$ (41), et spécifiant par l'indice s_2 dont nous l'affectons la détermination de ϵ expressément considérée.

D'autre part, la définition (109) de λ donnant par le moyen de la dernière égalité de droite (71), en tenant compte de l'hypothèse actuelle (88) et de la valeur connexe (106) de $s_2 = s$,

$$\begin{aligned} m^2\lambda &= m^2(g^2 - k^2) = -(n^2 + s_2 - \theta) = -n^2 - s_2 + \theta \\ &= m^2(1 - g^2) + m^2g^2 - s_2 + \theta = (\varpi + \theta) + m^2g^2 - m^2x^2, \end{aligned}$$

l'égalité de droite (110) donnera donc pour le cas actuel

$$(119)\quad \left\{ \begin{aligned} m^2(\lambda - \mu) &= m^2(2\lambda - 1) = 2m^2\lambda - m^2 \\ &= 2[(\varpi + \theta) + m^2(g^2 - x^2)] - m^2 \\ &= -m^2(1 - 2g^2 + 2x^2) + 2(\varpi + \theta) \\ &= -m^2X_1 + 2(\varpi + \theta), \end{aligned} \right.$$

en faisant pour un instant :

$$(120)\qquad X_1 = 1 - 2g^2 + 2x^2.$$

En tenant compte de ces deux expressions (119) et (118), la quadrature en question $\mathcal{K}$ (114) sera donc, étant exprimée en θ à la place de k :

$$(121)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{1}{3} im^5 \int_g^k (\lambda - \mu)\, x \sqrt{\overline{X}}\, \frac{2k\, dk}{\sqrt{\overline{K}}} \\ &= \frac{1}{3} \int_g^k m^2(\lambda - \mu).\, im^3\, x \sqrt{\overline{X}}\, \frac{2k\, dk}{\sqrt{\overline{K}}} \\ &= \frac{1}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [-m^2X_1 + 2(\varpi + \theta)].(-\sqrt{\overline{S_2}})(\varpi + \theta) \frac{d\theta}{(\Delta\theta)_{s_2}} \\ &= \frac{\sqrt{\overline{S_2}}}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [m^2X_1(\varpi + \theta) - 2(\varpi + \theta)^2] \frac{d\theta}{(\Delta\theta)_{s_2}}. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, changeons encore une fois de variable en prenant de nouveau, comme dans le cas précédent, à la place de θ la variable φ définie par les égalités (41) et (42) du § II, mais considérées encore expressément pour la détermination $\epsilon = \epsilon_2 = s_2$; en d'autres termes, ayant fait de même cette fois

$$(122)\quad \left\{ \begin{aligned} &L_2 = \varpi - l^2 + s_2, \qquad N_2 = \varpi + n^2 + s_2, \\ &(\Delta\theta)_{s_2} = \sqrt{(\varpi + \theta)(l^2 - s_2 + \theta)(n^2 + s_2 - \theta)}, \end{aligned} \right.$$

posons avec ces définitions

$$(123) \qquad k_2^2 = \frac{L_2}{N_2}, \qquad \mathrm{sn}^2(\varphi, k_2) = \frac{\varpi + \theta}{L_2},$$

puis déduisons-en successivement comme alors

$$(124) \quad \begin{cases} \varpi + \theta = L_2 \,\mathrm{sn}^2 \varphi, & l^2 - s^2 + \theta = -L_2 \,\mathrm{cn}^2 \varphi, \\ & n^2 + s_2 - \theta = N_2 \,\mathrm{dn}^2 \varphi, \end{cases}$$

$$(125) \qquad \frac{d\theta}{(\Delta\theta)_{s_2}} = \frac{2\,d\varphi}{i\sqrt{N_2}};$$

et enfin remarquons, qu'en rapprochant l'une de l'autre les premières égalités précédentes (124) et (123), et de même la définition (120) de X_1 de la valeur antérieurement trouvée (97) pour N_2, jointe à celle (28) de k_2^2, nous pourrons alors écrire à la fois :

$$(126) \quad \begin{cases} \varpi + \theta = N_2 \cdot \dfrac{L_2}{N_2} \,\mathrm{sn}^2(\varphi, k_2) = N_2 \cdot k_2^2 \,\mathrm{sn}^2(\varphi, k_2), \\ m^2 X_1 = m^2 (1 - 2g^2 + 2x^2) \\ \qquad = m^2 (x^2 - g^2) \cdot \left(1 + \dfrac{x^2 + (1 - g^2)}{x^2 - g^2}\right) = N_2 \cdot (1 + k_2^2). \end{cases}$$

Avec ces deux dernières valeurs et la précédente (125), la quadrature envisagée (121), étant exprimée en φ au lieu de θ, deviendra donc successivement

$$\mathcal{K} = \frac{\sqrt{S_2}}{3} \int_{\varphi_2^{(1)}}^{\varphi_2^{(2)}} \Big(N_2 (1 + k_2^2) \cdot N_2 k_2^2 \,\mathrm{sn}^2(\varphi, k_2) - 2\,[N_2 k_2^2 \,\mathrm{sn}^2(\varphi, k_2)]^2 \Big) \frac{2d\varphi}{i\sqrt{N_2}}$$

$$= \frac{-2i}{3} S_2^{\frac{1}{2}} N_2^{\frac{3}{2}} \int_{\varphi_2^{(1)}}^{\varphi_2^{(2)}} \Big[(1 + k_2^2) \, k_2^2 \,\mathrm{sn}^2(\varphi, k_2) - 2k_2^4 \,\mathrm{sn}^4(\varphi, k_2) \Big] d\varphi$$

$$= \frac{-2i}{3^2} S_2^{\frac{1}{2}} N_2^{\frac{3}{2}} \Big[3 (1 + k_2^2) \cdot \int_0^{\varphi} k_2^2 \,\mathrm{sn}^2(\varphi, k_2)\, d\varphi - 2 \cdot 3 k_2^4 \int_0^{\varphi} \mathrm{sn}^4(\varphi, k_2)\, d\varphi \Big]_{\varphi_1^{(2)}}^{\varphi_2^{(2)}};$$

c'est-à-dire, en ayant recours de nouveau à la formule de quadrature (94), puis employant encore les deux notations très commodes des symboles Φ (95) et $\overline{E}$ (48) :

$$\mathcal{K} = \frac{-2i}{3^2}(S_2N_2)^{\frac{1}{2}}N_2\left[3(1+k_2^2)Z(\varphi) - 2\left\{k_2^2(\operatorname{sn}\varphi\operatorname{cn}\varphi\operatorname{dn}\varphi - \varphi)\right.\right.$$
$$\left.\left. + 2(1+k_2^2)Z(\varphi)\right\}\right]_{\varphi_2^{(1)}}^{\varphi_2^{(2)}}$$
$$= \frac{-2i}{3^2}N_2\overline{S_2}\left[-2k^2\Phi + \left\{2k_2^2\varphi - (1+k_2^2)Z(\varphi)\right\}\right]_{\varphi_2^{(1)}}^{\varphi_2^{(2)}};$$

et par conséquent, celle (115) de $J^{(0)}$, qui doit constituer le premier membre de l'équation que nous nous proposons de former, sera elle-même :

$$J^{(0)} = -\frac{2i}{3^2}N_2\overline{S_2}\left[-2k_2^2\Phi + \left\{2k_2^2\varphi - (1+k_2^2)Z(\varphi)\right\}\right]_{\varphi_2^{(1)}}^{\varphi_2^{(2)}}$$
$$+ \frac{1}{3}im^5\left[\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{A.\,2k\,dk}{\sqrt{K}} + \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{B.\,2k\,dk}{\sqrt{K}}\right].$$

Nous n'avons plus à présent qu'à égaler cette dernière expression de $J^{(0)}$ à celle (99) [écrite en abrégé à l'aide de la notation suivante (100)], précédemment obtenue par le moyen du système de variables ω et θ, pour posséder la formule demandée, laquelle sera ainsi, sous réserve des réductions et transformations algébriques très simples qui nous restent encore à accomplir,

$$-\frac{2i}{3^2}N_2\overline{S_2}\left[-2k_2^2\Phi + \left\{2k_2^2\varphi - (1+k_2^2)Z(\varphi)\right\}\right]_{\varphi_2^{(1)}}^{\varphi_2^{(2)}}$$
$$+ \frac{1}{3}im^5\left[\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{A.\,2k\,dk}{\sqrt{K}} + \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{B.\,2k\,dk}{\sqrt{K}}\right]$$
$$= -\frac{2i}{3^2}N_2\overline{S_2}\left[3k_2^2\Phi + 3\left\{2k_2^2\varphi - (1+k_2^2)Z(\varphi)\right\}\right]_{\varphi_1^{(2)}}^{\varphi_2^{(2)}} + \Omega_4;$$

c'est-à-dire, en effectuant alors les réductions que nous venons d'annoncer, l'équation suivante dont le second membre se développera et se transformera ensuite exactement de la même façon que pour le calcul ci-dessus de la quantité Ω_4 (100), puisque en nous reportant de même aux considérations exposées dans le paragraphe précédent (pp. 31-33) nous aurons semblablement

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_2^{(1)} = K_2 + iK_2', \qquad \varphi_2^{(2)} - \varphi_2^{(1)} = \varphi_2, \\ Z(\varphi_2^{(2)}) - Z(\varphi_2^{(1)}) = Z(\varphi_2) - \Theta_2, \\ \Phi_2^{(1)} = \operatorname{sn}\varphi_2^{(1)} \operatorname{cn}\varphi_2^{(1)} \operatorname{dn}\varphi_2^{(1)} = 0, \\ \Phi_2^{(2)} = \operatorname{sn}\varphi_2^{(2)} \operatorname{cn}\varphi_2^{(2)} \operatorname{dn}\varphi_2^{(2)} = \Theta_2 \operatorname{cn}^2\varphi_2^{(2)}, \end{array}\right.$$

à savoir l'équation

$$(127)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{3} im^5 \left[\displaystyle\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{A.\,2k\,dk}{\sqrt{K}} + \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{B.\,2k\,dk}{\sqrt{K}}\right] \\ = -\dfrac{2i}{3^2} N_2\overline{S_2}\left[5k_2^2\Phi + 2\left\{2k_2^2\varphi - (1+k_2^2)Z(\varphi)\right\}\right]_{\varphi_2^{(1)}}^{\varphi_2^{(2)}} + \Omega_4 \\ = -\dfrac{2i}{3^2} N_2\overline{S_2}\left[5k_2^2(\Phi_2^{(2)} - \Phi_2^{(1)}) + 2.\ 2k_2^2(\varphi_2^{(2)} - \varphi_2^{(1)})\right. \\ \qquad\qquad \left. - 2(1+k_2^2)\left\{(Z(\varphi_2^{(2)}) - Z(\varphi_2^{(1)})\right\}\right] + \Omega_4 \\ = -\dfrac{2i}{3^2} N_2\overline{S_2}\left[5k_2^2.\,\Theta_2 \operatorname{cn}^2\varphi_2^{(2)} + 2\left\{2k_2^2\varphi_2\right.\right. \\ \qquad\qquad \left.\left. - (1+k_2^2)(Z(\varphi_2) - \Theta_2)\right\}\right] + \Omega_4 \\ = -\dfrac{2i}{3^2}\left[\Delta_2 + 2N_2\overline{S_2}\left\{2k_2^2\varphi_2 - (1+k_2^2)Z(\varphi_2)\right\}\right] + \Omega_4, \end{array}\right.$$

en représentant comme plus haut [formule (104)] par Δ_2 la partie algébrique en x et k (au facteur constant $\frac{-2i}{3^2}$ près) du développement de ce second membre, savoir

$$(128)\qquad \Delta_2 = N_2\left\{5k_2^2 \operatorname{cn}^2\varphi_2^{(2)} + 2(1+k_2^2)\right\}\overline{S_2}\Theta_2,$$

laquelle reste ainsi seule à calculer, exactement de la même façon que la quantité analogue (104).

A cet effet, déduisant d'abord des valeurs (52) de $\overline{S}_2$ et (58) de Θ_2 celle du produit

$$(129)\quad \left\{\begin{aligned} \overline{S}_2\Theta_2 &= im^3x\sqrt{1-x^2}\sqrt{g^2-x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{g^2-x^2}}\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}} \\ &= im^3x\sqrt{1-x^2}\sqrt{x^2-k^2}\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}, \end{aligned}\right.$$

nous conclurons ensuite de cette valeur jointe à celles (97) de N_2, (28) de k_2 et (18) de $\mathrm{cn}^2\varphi_2^{(2)}$, pour la quantité ci-dessus (128), la suivante :

$$(130)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta_2 &= m^2(x^2-g^2)\cdot\left[5\frac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}\frac{g'^2+k^2}{x^2+g'^2}+2\left(1+\frac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}\right)\right]\overline{S}_2\Theta_2 \\ &= m^2\overline{S}_2\Theta_2\cdot\left[5(1-g^2+k^2)+2\right\}(x^2-g^2)+(x^2+1-g^2)\left\{\right] \\ &= im^5\left[(7-9g^2)+4x^2+5k^2\right]x\sqrt{1-x^2}\sqrt{x^2-k^2}\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}. \end{aligned}\right.$$

Cette dernière valeur ainsi obtenue, multiplions à présent par $\frac{-3i}{m^5}$ la suite d'égalités qui précède (127), en faisant abstraction de tous les membres intermédiaires et supposant, au dernier membre, le symbole Ω_4 remplacé par sa valeur (103); l'égalité qui résultera de cette opération, et qui est précisément celle à laquelle nous voulions arriver, sera

$$(131)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k},k\right)\frac{A.2k\,dk}{\sqrt{K}}+\int_g^k F_1\left(\frac{x}{k},k\right)\frac{B.2k\,dk}{\sqrt{K}} \\ &=-\frac{2}{3m^5}\left[\Delta_2+2N_2\overline{S}_2\right\}2k_2^2\varphi_2-(1+k_2^2)Z(\varphi_2)\left\{\right] \\ &\quad+\frac{2}{3m^5}\left[3\Delta_4+3N_4\overline{T}_2\right\}2k_1^2\varphi_1-(1+k_1^2)Z(\varphi_1)\left\{\right] \\ &=\frac{2}{3}\left[\nabla-2\frac{N_2\overline{S}_2}{m^5}\right\}2k_2^2\varphi_2-(1+k_2^2)Z(\varphi_2)\left\{\right. \\ &\qquad+3\frac{N_4\overline{T}_2}{m^5}\left\}2k_1^2\varphi_1-(1+k_1^2)Z(\varphi_1)\left\{\right]\right], \end{aligned}\right.$$

en désignant encore par le symbole ∇ la nouvelle partie algébrique, qui sera dans cette équation, eu égard aux valeurs (130) de Δ_2 et (105) de Δ_4 :

$$
(132)\quad \left\{\begin{aligned}
\nabla &= \frac{1}{m^5}(-\Delta_2 + 3\Delta_4) \\
&= \frac{1}{m^5}\Big[-im^5\{(7-9g^2)+4x^2+5k^2\}\times \\
&\qquad\qquad x\sqrt{1-x^2}\sqrt{x^2-k^2}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}} \\
&\qquad + 3im^5\{2(1-k^2)-x^2\}\sqrt{g^2-k^2}\sqrt{g'^2+k^2}\,\frac{x\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\Big] \\
&= ix\sqrt{x^2-k^2}\sqrt{g^2-k^2}\Big[-\{(7-g^2)+4x^2+5k^2\}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}} \\
&\qquad\qquad + 3\{2(1-k^2)-x^2\}\frac{\sqrt{g'^2+k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\Big] \\
&= ix\,\mathfrak{F}_2(x^2,k^2)\,\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}},
\end{aligned}\right.
$$

en convenant de représenter enfin par $\mathfrak{F}_2(x^2, k^2)$ le polynôme à deux variables dont l'indice marque le degré en x^2 et k^2, savoir

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F}_2(x^2,k^2) = &-[(7-9g^2)+4x^2+5k^2](1-x^2) \\
&+3[2(1-k^2)-x^2](g'^2+k^2),
\end{aligned}
$$

lequel polynôme $\mathfrak{F}_2(x^2, k^2)$ satisfera ainsi *à priori*, de par sa définition même, à la condition $\mathfrak{F}_2(1, -g'^2) = 0$, et représentera, étant développé et ordonné, l'expression suivante que procure un calcul très facile :

$$
(133)\quad \mathfrak{F}_2(x^2,k^2) = 4x^4 + 2x^2k^2 - 6k^4 - 6g^2x^2 - (5-6g^2)k^2 - (1-3g^2).
$$

D'ailleurs, les expressions (52) de $\overline{S_2}$ et $\overline{T_2}$, et (97) de N_2 et N_4 donneront aussi très aisément pour les valeurs respectives des

coefficients des deux parenthèses, à l'intérieur des crochets, dans la forme d'équation obtenue en dernier lieu (131), savoir :

$$(134)\quad \left\{\begin{array}{l} -2\dfrac{N_2\overline{S_2}}{m^5} = \dfrac{-2}{m^5}\left[-m^2(g^2-x^2)\right].\, im^3x\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{g^2-x^2} \\ \qquad\qquad = 2ix\sqrt{1-x^2}\,(g^2-x^2)^{\frac{3}{2}}, \\ 3\dfrac{N_4\overline{T_2}}{m^5} = \dfrac{3}{m^5}\,(-m^2k^2).\, im^3k\sqrt{g^2-k^2}\,\sqrt{g'^2+k^2} \\ \qquad\qquad = -3ik^3\sqrt{g^2-k^2}\,\sqrt{g'^2+k^2}. \end{array}\right.$$

En résumé, si pour donner au résultat de ce calcul, une forme analogue à celle des résultats obtenus dans les §§ I et II précédents, nous convenons de représenter par $\varpi_1(k^2)$ et $\varpi_2(k^2)$ les polynômes du second degré en k^2 que nous avons trouvés ci-dessus pour expressions des coefficients A (116) et — B (117), en ayant égard à ces dernières valeurs (134) et (133), ainsi qu'à celles (132) de ∇, et mettant alors en évidence le facteur i, l'on voit donc que nous pouvons formuler le dit résultat par l'énoncé du nouveau Théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Si l'on désigne respectivement par* $\varpi_1(k^2)$ *et* $\varpi_2(k^2)$ *les deux polynômes du second degré en* k^2

$$(135)\quad \left\{\begin{array}{l} \varpi_1(k^2) = (1+4g^2-6g^4) - (6-16g^2)\,k^2 - 10k^4, \\ \varpi_2(k^2) = 3g^2(1-g^2) - (4-8g^2)\,k^2 - 5k^4, \end{array}\right.$$

et par $\mathfrak{F}_2(x^2, k^2)$ *le polynôme à deux variables, dont l'indice marque le degré en* x^2 *et* k^2,

$$(136)\quad \mathfrak{F}_2(x^2, k^2) = 4x^4 + 2x^2k^2 - 6k^4 - 6g^2x^2 - (5-6g^2)\,k^2 - (1-3g^2),$$

l'on aura, toujours avec les mêmes définitions, la troisième formule de quadrature :

$$(137)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_g^k \mathrm{F}_2\left(\frac{x}{k},\, k\right)\frac{\varpi_1(k^2).\,2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)\,(g'^2+k^2)}} - \int_g^k \mathrm{F}_1\left(\frac{x}{k},\, k\right)\frac{\varpi_2(k^2).\,2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)\,(g'^2+k^2)}} \\ &= \frac{2i}{3}\left[x\,\mathfrak{F}_2(x^2,k^2)\,\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}\right. \\ &\qquad + 2x\sqrt{1-x^2}\,(g^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\left\{2k_2^2\varphi_2 - (1+k_2^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_2,k_2)\right\} \\ &\qquad \left. - 3k^3\sqrt{g^2-k^2}\,\sqrt{g'^2+k^2}\left\{2k_1^2\varphi_1 - (1+k_1^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_1,k_1)\right\}\right]. \end{aligned}\right.$$

Nous retrouvons également ce même résultat par deux autres méthodes absolument différentes de celle qui nous l'a procuré tout à l'heure, mais nous ne pourrions exposer encore ces deux nouvelles démonstrations sans étendre outre mesure le développement de ce Mémoire.

IV

La classe d'intégrales que nous avons en vue dans ce Mémoire est celle qui est comprise dans le type général

$$\int_g^k \mathrm{F}\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{k^{2n}.\,2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)\,(g'^2+k^2)}},$$

l'exposant n étant un entier positif ou négatif et le symbole F désignant indifféremment l'une ou l'autre des deux intégrales elliptiques normales F_1 ou F_2 (7), qui nous ont servi de point de départ pour cette étude.

Nous proposant comme but de ce travail d'en déterminer l'expression, si cela est possible à l'aide des fonctions connues ou, dans le cas contraire, de les ramener à leurs éléments irréductibles les plus simples, nous introduirons en conséquence, pour représenter chacune d'elles, un symbole spécial qui sera la lettre I ou la lettre J, suivant que ce sera la fonction F_1 ou la fonction F_2 qui figurera dans l'élément différentiel, la dite lettre étant dans les deux cas affectée de l'indice n; en d'autres termes nous poserons :

$$(138)\quad \mathrm{I}_n = \int_g^k \mathrm{F}_1\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{k^{2n}.\,2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}}, \quad \mathrm{J}_n = \int_g^k \mathrm{F}_2\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{k^{2n}.\,2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}}.$$

Ces définitions étant admises, il est clair, d'une part, que les premiers membres de chacune des formules des trois Théorèmes démontrés jusqu'ici seront des fonctions linéaires et homogènes des premières de ces quantités I_n, J_n.

D'autre part, il résulte immédiatement des définitions (28) des deux modules k_1 et k_2, lesquelles donnent respectivement

$$\left\{\begin{array}{ll} -k^2k_1^2 = 1-k^2, & -k^2(1+k_1^2) = 1-2k^2, \\ (x^2-g^2)k_2^2 = x^2+g'^2, & (x^2-g^2)(1+k_2^2) = 2x^2+(g'^2-g^2), \end{array}\right.$$

qu'en adjoignant aux notations originaires (4), pour toute la suite de ce Mémoire également, ces nouvelles définitions

$$(139)\quad \mathfrak{X} = (1-x^2)(g^2-x^2), \qquad \Delta = \frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}},$$

l'on pourra écrire alors aussi bien

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{\mathrm{K}}\,\dfrac{x\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}} = x(g'^2+k^2)\Delta, \\ -k^3\sqrt{\mathrm{K}}\,\{2k_1^2\varphi_1 - (1+k_1^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_1,k_1)\} \\ = k\sqrt{\mathrm{K}}\,\{2(1-k^2)\varphi_1 - (1-2k^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_1,k_1)\}, \\ x\sqrt{1-x^2}\,(g^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\{2k_2^2\varphi_2 - (1+k_2^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_2,k_2)\} \\ = x\sqrt{\mathfrak{X}}\,\{2(x^2+g'^2)\varphi_2 - (2x^2+g'^2-g^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_2,k_2)\}, \end{array}\right.$$

en sorte que les formules des trois Théorèmes démontrés jusqu'ici deviendront ainsi (en changeant tous les signes quant à la seconde), les quatre équations linéaires par rapport aux quantités I_n, J_n en question que nous allons écrire :

Tableau A

$$(\mathrm{I})\quad \mathrm{J}_0 - (g^2\mathrm{I}_0 - \mathrm{I}_1) = 2ig'[\Pi(\varphi_2,h_2,k_2) - \Pi(\varphi_1,h_1,k_1)],$$

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{array}{l} [(1-2g^2)\,\mathrm{J}_0 + 2\mathrm{J}_1] + [g^2(1-g^2)\,\mathrm{I}_0 - 2(1-2g^2)\,\mathrm{I}_1 - 3\mathrm{I}_2] \\ \qquad = 2i[x(g'^2+k^2)\Delta - k\sqrt{\mathrm{K}}\,\mathrm{Z}(\varphi_1,k_1)], \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{III})\quad \left\{\begin{array}{l} [(1+4g^2-6g^4)\,\mathrm{J}_0 - (6-16g^2)\,\mathrm{J}_1 - 10\mathrm{J}_2] - [3g^2(1-g^2)\,\mathrm{I}_0 - (4-8g^2)\,\mathrm{I}_1 - 5\mathrm{I}_2] \\ = \dfrac{2i}{3}[x\mathfrak{F}_2(x^2,k^2)\Delta + 2x\sqrt{\mathfrak{X}}\,\{2(x^2+g'^2)\varphi_2 - (2x^2+g'^2-g^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_2,k_2)\} \\ \qquad + 3k\sqrt{\mathrm{K}}\,\{2(1-k^2)\varphi_1 - (1-2k^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_1,k_1)\}]. \end{array}\right.$$

En présence de ces premiers résultats, l'idée vient naturellement à l'esprit de chercher à reconnaître combien l'on pourra former, à l'aide des mêmes procédés, en partant à chaque fois d'un nouveau type d'intégrale double convenablement choisi, d'équations semblables distinctes, entre un nombre déterminé de ces quantités I_n, J_n, parce que si, par hasard, les deux nombres étaient les mêmes de part et d'autre, l'expression de chacune de ces quantités serait alors évidemment de la même forme que chacun des seconds membres des équations ci-dessus : c'est-à-dire qu'elle se composerait d'un terme algébrique de la forme $ix\,\mathcal{F}(x^2, k^2)\,\Delta$, $\mathcal{F}$ désignant un polynôme à deux variables, et d'une expression linéaire par rapport aux trois fonctions elliptiques relatives aux éléments φ_1, h_1, k_1 d'une part et φ_2, h_2, k_2 de l'autre; et que si, au contraire, le nombre des équations était constamment inférieur au nombre des inconnues d'un même nombre fixe, soit 2 par exemple, les dites quantités se ramèneraient toutes, dans ce cas, aux mêmes éléments que tout à l'heure, et en outre aux *deux* premières d'entre elles I_0 et J_0, qui seraient alors des éléments irréductibles, à la façon des trois intégrales elliptiques de Legendre dans le calcul des quadratures de différentielles algébriques de la forme $f(x, \sqrt{X})$, X étant un polynôme du 3e ou du 4e degré.

Or, malgré la présomption contraire, c'est la première de ces deux conjectures que l'événement réalise (*), et le fait se produit pour la première fois quant aux huit inconnues $I_0, J_0, \ldots I_3, J_3$. Nous ne pouvons, évidemment, à cause de la longueur de semblables calculs, former ici effectivement ces huit équations, ni même les reproduire toutes explicitement; nous nous bornerons donc à rapporter seulement les trois suivantes, qui suffisent pour indiquer les éléments analytiques qui figureront dans l'expression des huit inconnues I_n, J_n précitées, lesquelles équations seront

---

(*) En l'état actuel de la question, en effet, et jusqu'à complète et rigoureuse étude du problème, cette conjecture n'offre qu'une probabilité très faible, et si elle se trouve réalisée par le fait, comme le montrera la suite de ce travail, ce résultat est dû uniquement à la forme très particulière de la fonction algébrique de k^2, savoir $2k^{2n+1}(g^2 - k^2)^{-\frac{1}{2}}(g'^2 + k^2)^{-\frac{1}{2}}$, qui accompagne en qualité de facteur les intégrales elliptiques F_1 ou F_2 dans l'élément des quadratures envisagées ci-dessus.

obtenues en partant respectivement des trois types nouveaux d'intégrale double :

$$(140)\quad \mathrm{I}^{(1)} = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2}(s-t)[5(s+t-f)+2\varpi](s+t+\varpi-f)^{\frac{1}{2}}\frac{ds}{\sqrt{\mathrm{S}}}\frac{dt}{\sqrt{\mathrm{T}}},$$

$$(141)\quad \mathrm{J}^{(1)} = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2}(s-t)[2st-m^2(s+t-f)](s+t+\varpi-f)^{\frac{1}{2}}\frac{ds}{\sqrt{\mathrm{S}}}\frac{dt}{\sqrt{\mathrm{T}}},$$

$$(142)\quad \mathfrak{J}^{(1)} = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2}(s-t)\,st\,(st+m^2\varpi)\,(s+t+\varpi-f)^{-\frac{3}{2}}\frac{ds}{\sqrt{\mathrm{S}}}\frac{dt}{\sqrt{\mathrm{T}}}.$$

En faisant, pour faciliter la lecture de ces équations,

$$(143)\quad \begin{cases} \mathcal{F}_2(x^2,k^2) = 2x^4+x^2k^2-12k^4-3g^2x^2-(7-12g^2)k^2+(4-3g^2), \\ \mathcal{F}_3(x^2,k^2) = -26x^6+2x^4k^2+144x^2k^4-15k^6 \\ \qquad -(44-70g^2)x^4+(58-190g^2)x^2k^2-(9-15g^2)k^4 \\ \qquad +(-32+37g^2+10g^4-20g^6)x^2+(30+40g^2)k^2 \\ \qquad +(42-47g^2-10g^4+20g^6), \\ \mathcal{F}_3(x^2,k^2) = 16x^6+8x^4k^2+6x^2k^4-30k^6 \\ \qquad -(2+40g^2)x^4-20g^2x^2k^2-(21-60g^2)k^4 \\ \qquad -(16-3g^2-30g^4)x^2+(7+20g^2-30g^4)k^2 \\ \qquad +(2+22g^2-15g^4), \end{cases}$$

ces trois polynômes en x^2 et k^2 étant tels que, si on les confond sous le même symbole $\mathcal{F}(x^2,k^2)$, ils vérifient tous les trois la condition $\mathcal{F}(1,-g'^2)=0$, les dites équations s'écriront alors respectivement :

Tableau B

$$
\text{(IV)}\quad
\begin{cases}
\quad[(2+5g^2-9g^4)\,J_0-(9-26g^2)\,J_1-17J_2] \\
-[(1+7g^2-9g^4)\,I_1-(10-24g^2)\,I_2-15I_3] \\
=\dfrac{2i}{3}\Big(x\mathcal{F}_2(x^2,k^2)\,\Delta+x\sqrt{\mathfrak{K}}\,[2(x^2+g'^2)\,\varphi_2-(2x^2+g'^2-g^2)\,Z(\varphi_2,k_2)] \\
\qquad\qquad +3k\sqrt{K}\,[(1-k_2)\,\varphi_1-2(1-2k^2)\,Z(\varphi_1,k_1)]\Big),
\end{cases}
$$

$$
\text{(V)}\quad
\begin{cases}
\quad[(2+g^2-5g^4)\,J_0+(-3+4g^2+10g^4)\,J_1+(3-24g^2)\,J_2+14J_3] \\
-[(1-7g^2+5g^4)\,I_1-(8-12g^2)\,I_2-7I_3] \\
=\dfrac{2i}{15}\Big(x\mathcal{F}_3(x^2,k^2)\,\Delta+x\sqrt{\mathfrak{K}}\,[\{16x^2-(12-4g^2)\}\cdot(x^2+g'^2)\,\varphi_2 \\
\qquad -\{16x^4-(4+12g^2)\,x^2-(9-14g^2+4g^4)\}\,Z(\varphi_2,k_2)] \\
\qquad -15k\sqrt{K}\,[(2k^2-1)\cdot(1-k^2)\varphi_1-2(k^4-k^2+1)Z(\varphi_1,k_1)]\Big),
\end{cases}
$$

$$
\text{(VI)}\quad
\begin{cases}
\quad[(3g^2+2g^4-6g^6)\,J_0-(3+10g^2-26g^4)\,J_1+(8-34g^2)\,J_2+14J_3] \\
-[3(g^4-g^6)\,I_0-(9-13g^4)\,I_1+(6-17g^2)\,I_2+7I_3] \\
=\dfrac{2i}{15}\Big(x\mathcal{F}_3(x^2,k^2)\,\Delta+2x\sqrt{\mathfrak{K}}\,[\{-8x^2+(1+8g^2)\}\cdot(x^2+g'^2)\,\varphi_2 \\
\qquad +\{8x^4+(3-16g^2)\,x^2-(2+3g^2-8g^4)\}\,Z(\varphi_2,k_2)] \\
+15k\sqrt{K}\,[2(k^2-g^2)\cdot(1-k^2)\varphi_1-\{2k^4-(1+2g^2)k^2+g^2\}Z(\varphi_1,k_1)]\Big).
\end{cases}
$$

Mais, si nous ne pouvons, à cause de leur longueur, effectuer ici les calculs d'intégration qui nous fourniraient par cette voie l'expression explicite des huit premières quantités I_n, J_n, nous allons, à la place, démontrer rigoureusement *a posteriori*, par la seule différentiation, la forme du résultat auquel nous auraient conduits les calculs précités, en nous proposant de résoudre la question suivante :

PROBLÈME. — *Étant considérées les deux expressions, savoir : d'une part celle-ci*

$$(144)\quad I = \alpha I_0 + \beta J_0 + \gamma I_1 + \delta J_1 + \epsilon I_2 + \eta J_2 + \theta I_3 + \zeta J_3 + \xi I_4,$$

dans laquelle les neuf coefficients $\alpha, \beta, \ldots, \xi$ *sont des constantes numériques arbitrairement données; et d'autre part la suivante*

$$(145)\quad \left\{ \begin{aligned} J = {} & x\left(\mathcal{F}_2(x^2,k^2)\sqrt{X}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g^2+k^2}} + \mathcal{J}_2(x^2,k^2)\sqrt{K}\,\frac{\sqrt{k^2-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\ & + ix\sqrt{\mathfrak{X}}\left(\frac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}f_2(x^2)\,\varphi_2 + \frac{f_3(x^2)}{x^2+g'^2}\,Z(\varphi_2,k_2)\right) \\ & + ik\sqrt{K}\,\left(\frac{1-k^2}{-k^2}f_2(x^2)\,\varphi_1 + \frac{f_3(k^2)}{1-k^2}\,Z(\varphi_1,k_1)\right) \\ & + \lambda ig'\left\{\Pi(\varphi_2,h_2,k_2) - \Pi(\varphi_1,h_1,k_1)\right\}, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle, en outre des notations précédemment convenues, les symboles $\mathcal{F}, \mathcal{J}, f$ *et* f *désignent des polynômes de deux ou une variable, à coefficients indéterminés, dont l'indice marque le degré : est-il possible de disposer de tous les coefficients de ces polynômes, ainsi que du dernier coefficient* λ, *de manière que l'on ait identiquement, c'est-à-dire quels que soient ceux* $\alpha, \beta, \ldots, \xi$ *de* I :

$$(146)\qquad \frac{\delta^2 I}{\delta x\,\delta k} = \frac{\delta^2 J}{\delta x\,\delta k}\ ?$$

Avant d'entreprendre l'étude de cette question, montrons tout d'abord, afin d'en faire comprendre l'intérêt, que, si elle est résolue affirmativement, cette réponse équivaudra en fait à la possession demandée de chacune des huit inconnues I_n, J_n précitées, et en outre de la neuvième I_4.

En effet, la condition proposée (146) équivaut tout d'abord à celle-ci

$$(147)\qquad I = J + \psi(x) + \varpi(k).$$

Mais on aperçoit de suite que chacune des fonctions I et J séparément est nulle lorsqu'on y fait à la fois $x = 0$ et $k = g$. Cela résulte immédiatement, quant à la première I, des défini-

tions (138) des quantités I_n, J_n; et quant à la seconde, des définitions (28) des arguments φ_1 et φ_2, ainsi que nous l'avons expliqué déjà à propos du Théorème I (p. 18).

Si donc on introduit en même temps la double supposition que nous venons de dire dans l'égalité précédente (147), elle se réduira par là à

$$0 = \psi(x) + \varpi(k), \qquad \text{ou} \qquad \psi(x) = -\varpi(k) = \text{const.},$$

(car c'est la seule façon dont cette condition puisse être vérifiée) et, par conséquent l'égalité (147) elle-même se réduira à $I = J$, à laquelle égalité équivaut ainsi complètement la condition (146) proposée par le problème.

Cela étant, si l'on suppose cette dernière remplie, c'est-à-dire si l'on suppose tous les divers coefficients de la seconde expression J déterminés en fonction de ceux de la première I, comme nous allons l'expliquer, de manière à satisfaire à la dite condition (146), il est clair que pour avoir successivement l'expression de chacune des quantités I_n, J_n considérées, il suffira de supposer à chaque fois les coefficients $\alpha, \beta, \ldots, \xi$ nuls sauf un seul, qu'on supposera égal à l'unité, et d'introduire dès lors cette hypothèse dans les valeurs obtenues pour les divers coefficients de J.

Abordons donc à présent le problème proposé qui équivaut ainsi, comme on le voit, à la connaissance synthétique des expressions cherchées.

Pour rendre plus claire l'exposition de cette démonstration, laquelle repose en grande partie sur la considération des degrés des différents polynômes qui y interviendront, nous aurons soin, en règle générale, d'affecter toujours les symboles de chacun de ces polynômes (à deux ou une variable) d'un indice qui en marquera le degré en x^2 et k^2, ainsi que nous l'avons déjà fait pour ceux qui figuraient dans l'énoncé du Problème.

Cette observation faite une fois pour toutes, si l'on tient compte des interprétations (8), qui permettent d'écrire la définition (138) des quantités I_n, J_n sous la forme

$$I_n = \int_g^k \left(\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} \right) \frac{k^{2n} \cdot 2k\, dk}{\sqrt{K}}, \qquad J_n = \int_g^k \left(\int_0^x \frac{x^2\, dx}{\sqrt{X}} \right) \frac{k^{2n} \cdot 2k\, dk}{\sqrt{K}},$$

on aura immédiatement, pour la dérivée seconde considérée de I,

$$(148)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\delta^2 I}{\delta x\,\delta k} &= \frac{2k}{\sqrt{\overline{X}}\sqrt{\overline{K}}}\,(\alpha+\beta x^2+\gamma k^2+\delta x^2k^2+\epsilon k^4+\eta x^2k^4+\theta k^6\\ &\qquad\qquad +\zeta x^2k^6+\xi k^8)\\ &= \frac{2k}{\sqrt{\overline{X}}\sqrt{\overline{K}}}\,[(\alpha+\gamma k^2+\epsilon k^4+\theta k^6+\xi k^8)\\ &\qquad\qquad +x^2\,(\beta+\delta k^2+\eta k^4+\zeta k^6)].\end{aligned}\right.$$

C'est donc à cette forme qu'il s'agit de voir s'il est possible de ramener l'autre dérivée seconde $\frac{\delta^2 J}{\delta x\,\delta k}$.

Pour cela, en vue de faciliter l'écriture des calculs, nous poserons successivement

$$(149)\quad x\sqrt{\overline{X}}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g^2+k^2}}=\Delta',\qquad x\sqrt{\overline{K}}\,\frac{\sqrt{k^2-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=\Delta'',$$

$$(150)\quad \left\{\begin{aligned}\mathcal{F}_2\,(x^2,k^2)&=\alpha' x^4+\beta' x^2k^2+\gamma' k^4+\delta' x^2+\epsilon' k^2+\eta'=P',\\ \mathcal{J}_2\,(x^2,k^2)&=\alpha'' x^4+\beta'' x^2k^2+\gamma'' k^4+\delta'' x^2+\epsilon'' k^2+\eta''=P'',\end{aligned}\right.$$

$$(151)\quad \left\{\begin{aligned}ix\sqrt{\overline{\mathfrak{X}}}\left(\frac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}f_2\,(x^2)\,\varphi_2+\frac{f_3\,(x^2)}{x^2+g'^2}Z\,(\varphi_2,k_2)\right)&=Q',\\ ik\sqrt{\overline{K}}\,\left(\frac{1-k^2}{-k^2}f_1\,(k^2)\,\varphi_1+\frac{f_3\,(k^2)}{1-k^2}Z\,(\varphi_1,k_1)\right)&=Q'',\end{aligned}\right.$$

$$(152)\quad \lambda ig'\,\{\,\Pi\,(\varphi_2,h_2,k_2)-\Pi\,(\varphi_1,h_1,k_1)\,\}=R,$$

$$(153)\quad P'\Delta'+P''\Delta''=P,\qquad Q'+Q''=Q;$$

et, avec ces diverses notations, l'expression (145) de J s'écrira dès lors sous l'une ou l'autre des trois formes

$$(154)\quad \left\{\begin{aligned}J=P+Q+R&=(P'\Delta'+P''\Delta'')+(Q'+Q'')+R\\ &=(P'\Delta'+Q')+(P''\Delta''+Q'')+R,\end{aligned}\right.$$

et donnera, quant à la dernière:

$$(155)\quad \frac{\delta^2 J}{\delta x\,\delta k}=\frac{\delta^2\,(P'\Delta'+Q')}{\delta x\,\delta k}+\frac{\delta^2\,(P''\Delta''+Q'')}{\delta x\,\delta k}+\frac{\delta^2 R}{\delta x\,\delta k}.$$

Nous allons calculer successivement ces trois termes.

Pour le dernier tout d'abord, la définition (152) de R, rapprochée de la formule (27) du Théorème I, donnant, en tenant compte des expressions (8) des fonctions F_1 et F_2,

$$R = \frac{1}{2}\lambda.2ig'\{\Pi(\varphi_2, h_2, k_2) - \Pi(\varphi_1, h_1, k_1)\}$$

$$= \frac{1}{2}\lambda.\left[\int_g^h\left(\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}\right)\frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} - \int_g^h\left(\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}}\right)(g^2-k^2)\frac{2k\,dk}{\sqrt{K}}\right],$$

on obtiendra donc immédiatement :

$$(156)\quad \frac{\delta^2 R}{\delta x\,\delta k} = \frac{1}{2}\lambda\,\frac{x^2-(g^2-k^2)}{\sqrt{X}}\,\frac{2k}{\sqrt{K}} = \lambda\,(x^2+k^2-g^2)\,\frac{k}{\sqrt{X}\sqrt{K}}.$$

Cela fait, pour calculer le premier terme, nous tirerons de la définition (149) de Δ', eu égard à celle (4) de X,

$$l\Delta' = l\,(x\sqrt{1-x^2}) + \frac{1}{2}l\,(k^2-x^2) + \frac{1}{2}l\,(g^2-k^2) - \frac{1}{2}l\,(g'^2+k^2),$$

$$(157)\quad \frac{\delta.l\Delta'}{\delta k} = k\left(\frac{1}{k^2-x^2} + \frac{1}{k^2-g^2} - \frac{1}{k^2+g'^2}\right) = \frac{kV'}{U'},$$

en faisant :

$$(158)\quad \begin{cases} U' = (k^2-x^2)\,(k^2-g^2)\,(k^2+g'^2), \\ V' = (k^2-g^2)\,(k^2+g'^2) + (k^2+g'^2)\,(k^2-x^2) - (k^2-x^2)\,(k^2-g^2) \\ \quad = k^4 + 2g'^2k^2 - \{g^2g'^2 + (g'^2-g^2)\,x^2\{ \\ \quad = (k^4 + 2g'^2k^2 + g'^4) - \{(g'^4 + g^2g'^2) + x^2\{ \\ \quad = (k^2+g'^2)^2 - \{g'^2\,(g'^2+g^2) + x^2\{ = (k^2+g'^2)^2 - (g'^2+x^2). \end{cases}$$

Nous aurons donc alors, par le moyen de cette valeur (157) de $\frac{\delta.l\Delta'}{\delta k}$, d'une part,

$$\frac{\delta.P'\Delta'}{\delta k} = \Delta'\left(P'\frac{\delta l\Delta'}{\delta k} + \frac{\delta P'}{\delta k}\right) = \Delta'\left(P'\frac{kV'}{U'} + \frac{\delta P'}{\delta.k^2}2k\right)$$

$$= \frac{k\Delta'}{U'}\left(P'V' + 2U'\frac{\delta P'}{\delta.k^2}\right),$$

expression pour laquelle les définitions (149) de Δ' et (158) de U' donneront

$$(159)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{k\Delta'}{U'} &= k.x\sqrt{1-x^2}\sqrt{k^2-x^2}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}\cdot\frac{1}{-(k^2-x^2)(g^2-k^2)(g'^2+k^2)} \\ &= \frac{-k}{(g'^2+k^2)\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}}\,\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{k^2-x^2}} \\ &= \frac{-k}{(g'^2+k^2)\sqrt{K}}\,\Theta, \end{aligned}\right.$$

en faisant de nouveau

$$(160)\qquad \Theta = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{k^2-x^2}},$$

et qui deviendra donc successivement, par le moyen de cette valeur (159) puis de celle (158) de V' :

$$(161)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\delta.P'\Delta'}{\delta k} &= \frac{-k\Theta}{\sqrt{K}}\,\frac{P'V'+2U'\dfrac{\delta P'}{\delta.k^2}}{g'^2+k^2} \\ &= \frac{-k\Theta}{\sqrt{K}}\left(P'\frac{V'}{k^2+g'^2}+2\frac{U'}{k^2+g'^2}\frac{\delta P'}{\delta.k^2}\right) \\ &= \frac{-k\Theta}{\sqrt{K}}\left[P'\left((k^2+g'^2)-\frac{g'^2+x^2}{k^2+g'^2}\right)+2\frac{U'}{k^2+g'^2}\frac{\delta P'}{\delta.k^2}\right] \\ &= \frac{-k\Theta}{\sqrt{K}}\left[\left(P'(k^2+g'^2)-(g'^2+x^2)\frac{P'}{k^2+g'^2}\right)+2\frac{U'}{k^2+g'^2}\frac{\delta P'}{\delta.k^2}\right]. \end{aligned}\right.$$

Or, la définition (150) de P' donnant

$$\left\{\begin{aligned} P' &= \mathfrak{F}_2(x^2,k^2) = \gamma'(k^2)^2+(\beta'x^2+\epsilon')k^2+(\alpha'x^4+\delta'x^2+\eta'), \\ \frac{P'}{k^2+g'^2} &= \gamma'k^2+\{-\gamma'g'^2+(\beta'x^2+\epsilon')\}-\frac{\mathfrak{F}_2(x^2,-g'^2)}{k^2+g'^2}, \\ \frac{\delta P'}{\delta.k^2} &= 2\gamma'k^2+(\beta'x^2+\epsilon'), \end{aligned}\right.$$

l'expression précédente (161) deviendra donc, en y remettant ces valeurs, ainsi que celle (158) de U',

$$(162)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\delta P'\Delta'}{\delta k} &= \frac{-k\Theta}{\sqrt{K}}\Big[\Big\{P'(k^2+g'^2)-(x^2+g'^2)\times\\ &\qquad\Big(\gamma'k^2+(-\gamma'g'^2+\beta'x^2+\epsilon')+\frac{\mathfrak{F}_2(x^2,-g'^2)}{k^2+g'^2}\Big)\Big\}\\ &\qquad+2(k^2-x^2)(k^2-g^2)(2\gamma'k^2+\beta'x^2+\epsilon')\Big]\\ &= \frac{-k\Theta}{\sqrt{K}}\Big(\mathfrak{F}_3(x^2,k^2)-\frac{(x^2+g'^2)\,\mathfrak{F}_2(x^2,-g'^2)}{k^2+g'^2}\Big),\end{aligned}\right.$$

en faisant encore une fois :

$$(163)\quad \left\{\begin{aligned}\mathfrak{F}_3(x^2,k^2) &= \mathfrak{F}_2(x^2,k^2)(k^2+g'^2)\\ &\quad-(x^2+g'^2)\{\gamma'k^2+(-\gamma'g'^2+\beta'x^2+\epsilon')\{\\ &\quad+2(k^2-x^2)(k^2-g^2)\{2\gamma'k^2+(\beta'x^2+\epsilon')\{.\end{aligned}\right.$$

D'autre part, si l'on se rappelle la définition de la fonction elliptique de deuxième espèce Z (ω, k), savoir

$$Z(\omega,k)=\int_0^{\omega}k^2\,\mathrm{sn}^2(\omega,k)\,d\omega,$$

la définition (151) de Q, donnera, en tenant compte toujours de celles (28) des éléments k_2 et φ_2,

$$(164)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\delta Q'}{\delta k} &= ix\sqrt{\mathfrak{X}}\Big(\frac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}f_2(x^2)\frac{\delta\varphi_2}{\delta k}+\frac{f_3(x^2)}{x^2+g'^2}k_2^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi_2,k_2)\frac{\delta\varphi_2}{\delta k}\Big)\\ &= ix\sqrt{\mathfrak{X}}\Big(\frac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}f_2(x^2)+\frac{f_3(x^2)}{x^2+g'^2}\,\frac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}\,\frac{-(g^2-k^2)}{g'^2+k^2}\Big)\frac{\delta\varphi_2}{\delta k}\\ &= ix\sqrt{\mathfrak{X}}\Big(\frac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}f_2(x^2)+\frac{f_3(x^2)}{x^2-g^2}\,\frac{k^2-g^2}{k^2+g'^2}\Big)\frac{\delta\varphi_2}{\delta k}.\end{aligned}\right.$$

Or, quant au dernier facteur $\frac{\delta\varphi_2}{\delta k}$, ayant ($k_2$ étant indépendant de k)

$$(165)\qquad \frac{\delta.\,\mathrm{sn}^2\,\varphi_2}{\delta k} = \frac{\delta.\,\mathrm{sn}^2\,\varphi_2}{\delta\varphi_2}\,\frac{\delta\varphi_2}{\delta k}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\delta\varphi_2}{\delta k} = \frac{\dfrac{\delta.\,\mathrm{sn}^2\,\varphi_2}{\delta k}}{2\,\mathrm{sn}\,\varphi_2\,\mathrm{cn}\,\varphi_2\,\mathrm{dn}\,\varphi_2},$$

nous tirerons successivement de la deuxième ligne (28)

$$\mathrm{sn}^2\,(\varphi_2, k_2) = \frac{-(g^2-k^2)}{g'^2+k^2},$$

$$\mathrm{cn}^2\,(\varphi_2, k_2) = 1 - \mathrm{sn}^2\,(\varphi_2, k_2) = 1 - \frac{-(g^2-k^2)}{g'^2+k^2}$$

$$= \frac{(g'^2+k^2)+(g^2-k^2)}{g'^2+k^2} = \frac{1}{g'^2+k^2},$$

$$\mathrm{dn}^2\,(\varphi_2, k_2) = 1 - k_2^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi_2, k_2) = 1 - \frac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}\,\frac{-(g^2-k^2)}{g'^2+k^2}$$

$$= \frac{(x^2-g^2)(g'^2+k^2)+(x^2+g'^2)(g^2-k^2)}{(x^2-g^2)(g'^2+k^2)}$$

$$= \frac{(g'^2x^2-g^2g'^2+x^2k^2-g^2k^2)+(g^2x^2+g^2g'^2-x^2k^2-g'^2k^2)}{(x^2-g^2)(g'^2+k^2)}$$

$$= \frac{(g'^2+g^2)x^2-(g^2+g'^2)k^2}{(x^2-g^2)(g'^2+k^2)} = \frac{x^2-k^2}{(x^2-g^2)(g'^2+k^2)}$$

$$= \frac{k^2-x^2}{(g^2-x^2)(g'^2+k^2)},$$

$$\mathrm{sn}^2\varphi_2\,\mathrm{cn}^2\varphi_2\,\mathrm{dn}^2\varphi_2 = \frac{-(g^2-k^2)}{g'^2+k^2}\,\frac{1}{g'^2+k^2}\,\frac{k^2-x^2}{(g^2-x^2)(g'^2+k^2)}$$

$$= \frac{-(g^2-k^2)(k^2-x^2)}{(g^2-x^2)(g'^2+k^2)^3},$$

$$\frac{\delta.\,\mathrm{sn}^2\,\varphi_2}{\delta k} = \frac{(g'^2+k^2)+(g^2-k^2)}{(g'^2+k^2)^2}\,2k = \frac{2k}{(g'^2+k^2)^2},$$

et nous en conclurons dès lors pour la valeur précédente (165) de $\frac{\delta\varphi_2}{\delta k}$:

$$\frac{\delta\varphi_2}{\delta k} = \frac{\frac{2k}{(g'^2+k^2)^2}}{2\,\frac{i\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g^2-x^2}}\,\frac{\sqrt{k^2-x^2}}{(g'^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{k\sqrt{g^2-x^2}}{i\sqrt{g^2-k^2}\sqrt{g'^2+k^2}\sqrt{k^2-x^2}}.$$

Cela fait, reportant à présent cette valeur dans celle ci-dessus (164) de $\frac{\delta Q'}{\delta k}$, et tenant compte en même temps des définitions (4) de K et (139) de $\mathfrak{X}$, nous trouverons alors

$$(166)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\delta Q'}{\delta k} &= ix\sqrt{1-x^2}\sqrt{g^2-x^2}\,\times \\ &\quad \left(\frac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}f_2(x^2) + \frac{f_3(x^2)}{x^2-g^2}\,\frac{k^2-g^2}{k^2+g'^2}\right)\frac{k\sqrt{g^2-x^2}}{i\sqrt{\mathrm{K}}\sqrt{k^2-x^2}} \\ &= \frac{-ix\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{k^2-x^2}}\left((x^2+g'^2)f_2(x^2) + f_3(x^2)\,\frac{k^2-g^2}{k^2+g'^2}\right)\frac{k}{i\sqrt{\mathrm{K}}} \\ &= \frac{-k\Theta}{\sqrt{\mathrm{K}}}\left((x^2+g'^2)f_2(x^2) + f_3(x^2)\,\frac{k^2-g^2}{k^2+g'^2}\right), \end{aligned}\right.$$

eu égard à la définition (160) du symbole Θ.

Ces deux expressions (162) et (166) étant ainsi obtenues donneront maintenant, en les ajoutant,

$$(167)\quad \frac{\delta(\mathrm{P}'\Delta'+\mathrm{Q}')}{\delta k} = \frac{-k\Theta}{\sqrt{\mathrm{K}}}\left(\mathfrak{F}_3(x^2,k^2) + (x^2+g'^2)f_2(x^2) + \frac{\mathfrak{F}_4(x^2,k^2)}{k^2+g'^2}\right),$$

en désignant par $\mathfrak{F}_4(x^2,k^2)$ le nouveau polynôme en x^2 et k^2 :

$$(168)\quad \mathfrak{F}_4(x^2,k^2) = -(x^2+g'^2)\,\mathfrak{F}_2(x^2,-g'^2) + f_3(x^2)(k^2-g^2).$$

Or ce polynôme, étant considéré par rapport à k^2, deviendra divisible par $k^2+g'^2$, si l'on a

$$\begin{aligned} 0 = \mathfrak{F}_4(x^2,-g'^2) &= -(x^2+g'^2)\,\mathfrak{F}_2(x^2,-g'^2) + f_3(x^2)(-g'^2-g^2) \\ &= -(x^2+g'^2)\,\mathfrak{F}_2(x^2,-g'^2) - f_3(x^2), \end{aligned}$$

condition qui détermine complètement le polynôme $f_3(x^2)$ et lui assigne l'expression :

$$(169)\quad \left\{\begin{array}{l} f_3(x^2) = -(x^2+g'^2)\,\mathcal{F}_2(x^2,-g'^2), \\ \text{d'où} \\ \dfrac{f_3(x^2)}{x^2+g'^2} = -\mathcal{F}_2(x^2,-g'^2). \end{array}\right.$$

Supposons-la donc remplie : les égalités précédentes (168) puis (169) donneront alors

$$\frac{\mathcal{F}_4(x^2,k^2)}{k^2+g'^2} = f_3(x^2) = -(x^2+g'^2)\,\mathcal{F}_2(x^2,k^2),$$

valeur qui étant remise dans l'égalité ci-dessus (167), la transformera dans la suivante

$$(170)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\delta(P'\Delta'+Q')}{\delta k} = \dfrac{-k\Theta}{\sqrt{K}}\,[\,\{\,\mathcal{F}_3(x^2,k^2)+(x^2+g'^2)\,f_2(x^2)\,\} \\ \qquad\qquad -(x^2+g'^2)\,\mathcal{F}_2(x^2,-g'^2)\,] \\ \qquad = \dfrac{-k\Theta}{\sqrt{K}}\,\Phi_3(x^2,k^2), \end{array}\right.$$

en faisant encore une fois, en tenant compte de la définition (163) du symbole $\mathcal{F}_3(x^2,k^2)$:

$$(171)\quad \left\{\begin{array}{l} \Phi_3(x^2,k^2) = \mathcal{F}_3(x^2,k^2)+(x^2+g'^2)\,\{\,f_2(x^2)-\mathcal{F}_2(x^2,-g'^2)\,\} \\ \qquad = [\mathcal{F}_2(x^2,k^2)\,(k^2+g'^2) \\ \qquad\quad -(x^2+g'^2)\,\{\,\Upsilon'k^2+(-\Upsilon'g'^2+\beta'x^2+\epsilon')\,\} \\ \qquad\quad +2(k^2-x^2)\,(k^2-g^2)\,\{\,2\Upsilon'k^2+(\beta'x^2+\epsilon')\,\}\,] \\ \qquad\quad +(x^2+g'^2)\,\{\,f_2(x^2)-\mathcal{F}_2(x^2,-g'^2)\,\}. \end{array}\right.$$

Cette dérivée première en k étant ainsi calculée, nous en déduirons, en la différentiant de nouveau en x :

$$(172)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\delta^2(P'\Delta'+Q')}{\delta x\,\delta k} = \dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{\delta(P'\Delta'+Q')}{\delta k}\right) = \dfrac{-k}{\sqrt{K}}\,\dfrac{\delta.\,\Theta\Phi_3(x^2,k^2)}{\delta x} \\ \qquad = \dfrac{-k}{\sqrt{K}}\left(\Theta\,\dfrac{\delta\Phi_3}{\delta x}+\Phi_3(x^2,k^2)\,\dfrac{\delta\Theta}{\delta x}\right). \end{array}\right.$$

Or, la définition (160) de Θ donnant successivement

$$\left\{\begin{array}{l} l\Theta = lx + \frac{1}{2}l(1-x^2) - \frac{1}{2}l(k^2-x^2), \\ \frac{\delta.l\Theta}{\delta x} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{1-x^2} - \frac{-x}{k^2-x^2} \\ \qquad = x\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-k^2}\right) = \frac{x\mathrm{W}'}{x^2\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{W}'}{x\mathrm{X}}, \end{array}\right.$$

en faisant de nouveau

$$(173)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{W}' = (x^2-1)(x^2-k^2) + (x^2-k^2)x^2 - x^2(x^2-1) \\ \qquad = \{x^4 - (1+k^2)x^2 + k^2\{ - k^2x^2 + x^2 \\ \qquad = x^4 - 2k^2x^2 + k^2, \end{array}\right.$$

on aura donc encore, par le moyen de cette expression de $\frac{\delta.l\Theta}{\delta x}$,

$$\frac{\delta\Theta}{\delta x} = \Theta\frac{\delta.l\Theta}{\delta x} = \Theta\frac{\mathrm{W}'}{x\mathrm{X}} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{k^2-x^2}}\,\frac{\mathrm{W}'}{x.(1-x^2)(k^2-x^2)}$$
$$= \frac{\mathrm{W}'}{\sqrt{1-x^2}\,(k^2-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

valeur qui étant remise dans l'égalité précédente (172), en même temps que celle (160) de Θ, la transformera successivement dans la suivante :

$$(174)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\delta^2(\mathrm{P}'\Delta' + \mathrm{Q}')}{\delta x\,\delta k} = \frac{-k}{\sqrt{\mathrm{K}}}\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{k^2-x}}\frac{\delta\Phi_3}{\delta x} + \Phi_3(x^2,k^2)\frac{\mathrm{W}'}{\sqrt{1-x^2(k^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}}\right] \\ \qquad = \frac{-k}{\sqrt{\mathrm{K}}}\left[\frac{x(1-x^2)}{\sqrt{\mathrm{X}}}\cdot\frac{\delta\Phi_3}{\delta.x^2}2x + \frac{\Phi_3(x^2.k^2)}{k^2-x^2}\frac{\mathrm{W}'}{\sqrt{\mathrm{X}}}\right] \\ \qquad = \frac{k}{\sqrt{\mathrm{X}}\sqrt{\mathrm{K}}}\left[2x^2(x^2-1)\frac{\delta\Phi_3}{\delta.x^2} + \frac{\Phi_3(x^2.k^2)\mathrm{W}'}{x^2-k^2}\right]. \end{array}\right.$$

La valeur du premier terme de l'expression cherchée (155) étant ainsi calculée, nous obtiendrons évidemment celle du second terme par des moyens tout semblables.

Calquant donc, en quelque sorte, nos procédés ainsi que nos notations sur ceux et celles employés dans le calcul précédent, nous tirerons de même de la définition (149) de Δ''

$$\left\{\begin{array}{l} l\Delta'' = \frac{1}{2} l\mathrm{K} + lx + \frac{1}{2} l(k^2 - x^2) - \frac{1}{2} l(1 - x^2), \\ \frac{\delta . l\Delta''}{\delta x} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{k^2 - x^2} - \frac{-x}{1 - x} \\ \qquad = x\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{k^2 - x^2} + \frac{1}{1 - x^2}\right) = x\frac{\mathrm{V}''}{\mathrm{U}''}, \end{array}\right.$$

en faisant encore

$$(175)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{U}'' = x^2(k^2 - x^2)(1 - x^2), \\ \mathrm{V}'' = (k^2 - x^2)(1 - x^2) - (1 - x^2)x^2 + x^2(k^2 - x^2) \\ \qquad = \{k^2 - (1 + k^2)x^2 + x^4\} - x^2 + x^2k^2 = k^2 - 2x^2 + x^4 \\ \qquad = (k^2 - 1) + (1 - 2x^2 + x^4) = (x^2 - 1)^2 + (k^2 - 1), \end{array}\right.$$

et nous en déduirons, comme plus haut, d'une part,

$$\frac{\delta . \mathrm{P}''\Delta''}{\delta x} = \Delta''\left(\mathrm{P}''\frac{\delta . l\Delta''}{\delta x} + \frac{\delta \mathrm{P}''}{\delta x}\right) = \Delta''\left(\mathrm{P}''\frac{x\mathrm{V}''}{\mathrm{U}''} + \frac{\delta \mathrm{P}''}{\delta . x^2} 2x\right)$$
$$= \frac{x\Delta''}{\mathrm{U}''}\left(\mathrm{P}''\mathrm{V}'' + 2\mathrm{U}''\frac{\delta \mathrm{P}''}{\delta . x^2}\right),$$

expression pour laquelle les définitions (149) de Δ'' et (175) de U'' donnant cette fois

$$(176)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{x\Delta''}{\mathrm{U}''} = x . x\sqrt{\mathrm{K}}\frac{\sqrt{k^2 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\frac{1}{x^2(k^2 - x^2)(1 - x^2)} \\ \qquad = \frac{1}{1 - x^2}\frac{\sqrt{\mathrm{K}}}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{k^2 - x^2}} = \frac{-1}{x^2 - 1}\frac{\sqrt{\mathrm{K}}}{\sqrt{\mathrm{X}}}, \end{array}\right.$$

et qui deviendra donc encore successivement, par le moyen de cette dernière valeur (176), puis de celle (175) de V'',

$$(177)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\delta.\,P''\Delta''}{\delta x} &= -\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\,\frac{P''V'' + 2U''\,\dfrac{\delta P''}{\delta.\,x^2}}{x^2-1} \\ &= -\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\left(P''\,\frac{V''}{x^2-1} + 2\,\frac{U''}{x^2-1}\,\frac{\delta P''}{\delta.\,x^2}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\left[P''\left((x^2-1) + \frac{k^2-1}{x^2-1}\right) + 2U''\,\frac{\delta P''}{\delta.\,x^2}\right] \\ &= -\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\left[\left(P''\,(x^2-1) + (k^2-1)\,\frac{P''}{x^2-1}\right) + 2U''\,\frac{\delta P''}{\delta.\,x^2}\right]. \end{aligned}\right.$$

Or, la définition (150) de P'' donnant

$$\left\{\begin{aligned} P'' &= \mathcal{J}_2(x^2,k^2) = \alpha''(x^2)^2 + (\beta''k^2+\delta'')x^2 + (\gamma''k^4+\epsilon''k^2+\eta''), \\ \frac{P''}{x^2-1} &= \alpha''x^2 + \{\,\alpha'' + (\beta''x^2+\delta'')\,\{ + \frac{\mathcal{J}_2(1,k^2)}{x^2-1}, \\ \frac{\delta P''}{\delta.\,x^2} &= 2\alpha''x^2 + (\beta''k^2+\delta''), \end{aligned}\right.$$

l'expression précédente (177) deviendra donc encore, en y remettant ces dernières valeurs, ainsi que celle (175) de U'',

$$(178)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\delta.\,P''\Delta''}{\delta x} &= -\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\left[\left\{P''\,(x^2-1) + (k^2-1)\times\right.\right. \\ &\qquad \left.\left(\alpha''x^2 + (\alpha'' + \beta''k^2 + \delta'') + \frac{\mathcal{J}_2(1,k^2)}{x^2-1}\right)\right\} \\ &\qquad \left. + 2x^2\,(x^2 - k^2)\,\{\,2\alpha''x^2 + (\beta''k^2+\delta'')\,\{\right] \\ &= -\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\left(\mathcal{J}_3(x^2,k^2) + \frac{(k^2-1)\,\mathcal{J}_2(1,k^2)}{x^2-1}\right), \end{aligned}\right.$$

en faisant encore une fois :

$$(179)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{J}_3(x^2,k^2) &= \mathcal{J}_2(x^2,k^2)(x^2-1) \\ &\quad + (k^2-1)\{\alpha''x^2 + (\alpha'' + \beta''k^2 + \delta'')\{ \\ &\quad + 2x^2(x^2-k^2)(2\alpha''x^2 + \beta''k^2 + \delta''). \end{aligned}\right.$$

D'autre part, la définition (151) de Q'' donnera, comme plus haut, eu égard aux valeurs (28) des éléments φ_1 et k_1,

$$(180)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\delta Q''}{\delta x} &= ik\sqrt{K}\left(\frac{1-k^2}{-k^2}f_2(k^2)\frac{\delta\varphi_1}{\delta x} + \frac{f_3(k^2)}{1-k^2}k_1^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi_1,k_1)\frac{\delta\varphi_1}{\delta x}\right) \\ &= ik\sqrt{K}\left(\frac{1-k^2}{-k^2}f_2(k^2) + \frac{f_3(k^2)}{1-k^2}\frac{1-k^2}{-k^2}\frac{-x^2}{1-x^2}\right)\frac{\delta\varphi_1}{\delta x} \\ &= ik\sqrt{K}\left(\frac{1-k^2}{-k^2}f_2(k^2) + \frac{f_3(k^2)}{-k^2}\frac{-x^2}{1-x^2}\right)\frac{\delta\varphi_1}{\delta x}. \end{aligned}\right.$$

Or, la valeur du dernier facteur $\frac{\delta\varphi_1}{\delta x}$ sera fournie aisément encore, le module k_1 étant indépendant de x, par l'égalité

$$\frac{\delta.\,\mathrm{sn}^2\varphi_1}{\delta x} = \frac{\delta.\,\mathrm{sn}^2\varphi_1}{\delta\varphi_1}\frac{\delta\varphi_1}{\delta x}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\delta\varphi_1}{\delta x} = \frac{\frac{\delta.\,\mathrm{sn}^2\varphi_1}{\delta x}}{2\,\mathrm{sn}\,\varphi_1\,\mathrm{cn}\,\varphi_1\,\mathrm{dn}\,\varphi_1},$$

en tirant successivement de la première ligne des égalités (28)

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{sn}^2(\varphi_1,k_1) &= \frac{-x^2}{1-x^2}, \\ \mathrm{cn}^2(\varphi_1,k_1) &= 1-\mathrm{sn}^2(\varphi_1,k_1) = 1-\frac{-x^2}{1-x^2} \\ &= \frac{(1-x^2)+x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}, \\ \mathrm{dn}^2(\varphi_1,k_1) &= 1-k_1^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi_1,k_1) = 1-\frac{1-k^2}{-k^2}\frac{-x^2}{1-x^2} \\ &= \frac{k^2(1-x^2)-(1-k^2)x^2}{k^2(1-x^2)} = \frac{k^2-x^2}{k^2(1-x^2)}, \\ \mathrm{sn}^2\varphi_1\,\mathrm{cn}^2\varphi_1\,\mathrm{dn}^2\varphi_1 &= \frac{-x^2}{1-x^2}\frac{1}{1-x^2}\frac{k^2-x^2}{k^2(1-x^2)} = \frac{-x^2(k^2-x^2)}{k^2(1-x^2)^3}, \\ \frac{\delta.\,\mathrm{sn}^2\varphi_1}{\delta x} &= \frac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)^2}(-2x) = \frac{-2x}{(1-x^2)^2}, \end{aligned}\right.$$

car on trouvera ainsi sans peine, au moyen de ces dernières valeurs et eu égard à la définition (4) de X :

$$\frac{\delta\varphi_1}{\delta x} = \frac{\dfrac{-2x}{(1-x^2)^2}}{2\dfrac{ix\sqrt{k^2-x^2}}{k(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{ik}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{k^2-x^2}} = \frac{ik}{\sqrt{X}}.$$

Remettant donc à présent cette dernière valeur dans celle obtenue tout à l'heure (180) pour $\frac{\delta Q''}{\delta x}$, celle-ci deviendra

$$(181)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\delta Q''}{\delta x} &= ik\sqrt{K}\left(\frac{1-k^2}{-k^2}f_2(k^2) + \frac{f_3(k^2)}{-k^2}\frac{-x^2}{1-x^2}\right)\frac{ik}{\sqrt{X}} \\ &= \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\left((1-k^2)f_2(k^2) + f_3(k^2)\frac{x^2}{x^2-1}\right). \end{aligned}\right.$$

Cela fait, les deux expressions (178) et (181) étant ajoutées donneront maintenant

$$(182)\quad \frac{\delta(P''\Delta'' + Q'')}{\delta x} = -\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\left[\mathcal{F}_3(x^2,k^2) + (k^2-1)f_2(k^2) + \frac{\mathcal{F}_4(x^2,k^2)}{x^2-1}\right],$$

en désignant par $\mathcal{F}_4(x^2, k^2)$ le nouveau polynôme en x^2 et k^2 :

$$(183)\qquad \mathcal{F}_4(x^2,k^2) = (k^2-1)\,\mathcal{F}_2(1,k^2) - f_3(k^2)\,x^2.$$

Or, ce même polynôme, considéré par rapport à x^2, deviendra divisible par $x^2 - 1$, si l'on a

$$0 = \mathcal{F}_4(1,k^2) = (k^2-1)\,\mathcal{F}_2(1,k^2) - f_3(k^2),$$

condition qui détermine complètement le polynôme $f_3(k^2)$, et lui assigne l'expression :

$$(184)\quad f_3(k^2) = (k^2-1)\,\mathcal{F}_2(1,k^2), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{f_3(k^2)}{1-k^2} = -\mathcal{F}_2(1,k^2).$$

Cette condition étant donc encore supposée remplie, les égalités précédentes (183) puis (184) donneront alors

$$\frac{\mathcal{F}_4(x^2,k^2)}{x^2-1} = -f_3(k^2) = -(k^2-1)\,\mathcal{F}_2(1,k^2),$$

valeur qui, étant remise dans l'égalité (182), la transformera dans la suivante

$$(185)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\delta(P''\Delta''+Q'')}{\delta x} &= -\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\left[\left\{\mathcal{F}_3(x^2,k^2)+(k^2-1)\,f_2(k^2)\right\}\right.\\ &\qquad\qquad\left.-(k^2-1)\,\mathcal{F}_2(1,k^2)\right]\\ &= -\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\,\Psi_3(x^2,k^2),\end{aligned}\right.$$

en faisant encore une fois, eu égard à la définition (179) du symbole $\mathcal{F}_3(x^2,k^2)$:

$$(186)\quad \left\{\begin{aligned}\Psi_3(x^2,k^2) &= \mathcal{F}_3(x^2,k^2)+(k^2-1)\left\{f_2(k^2)-\mathcal{F}_2(1,k^2)\right\}\\ &= \left[\mathcal{F}_2(x^2,k^2)(x^2-1)+(k^2-1)\left\{\alpha''x^2+(\alpha''+\beta'')k^2+\delta''\right\}\right.\\ &\qquad +2x^2(x^2-k^2)(2\alpha''x^2+\beta''k^2+\delta'')\Big]\\ &\qquad +(k^2-1)\left\{f_2(k^2)-\mathcal{F}_2(1,k^2)\right\}.\end{aligned}\right.$$

Ce résultat acquis, il nous faut différentier à nouveau, en k, cette expression de la première dérivée, en x, que nous venons d'obtenir. Il convient donc de mettre en évidence le facteur de $\sqrt{X}$ indépendant de k, en récrivant la dite expression sous la forme

$$\frac{\delta(P''\Delta''+Q'')}{\delta x} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{k^2-x^2}}\,\Psi_3(x^2,k^2) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,H\Psi_3(x^2,k^2),$$

le nouveau symbole H tenant lieu dès lors de la quantité

$$(187)\qquad H = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{k^2-x^2}} = \frac{\sqrt{g^2-k^2}\,\sqrt{g'^2+k^2}}{\sqrt{k^2-x^2}},$$

auquel cas, la différentiation en question nous donnera :

$$(188)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\delta^2(P''\Delta''+Q'')}{\delta x\,\delta k} &= \frac{\delta}{\delta k}\left(\frac{\delta(P''\Delta''+Q'')}{\delta x}\right)\\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\delta.H\Psi_3(x^2,k^2)}{\delta k}\\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\left(H\,\frac{\delta\Psi_3}{\delta k}+\Psi_3(x^2,k^2)\,\frac{\delta H}{\delta k}\right).\end{aligned}\right.$$

Or, la définition (187) de cette quantité H donnant

$$lH = \frac{1}{2} l(g^2 - k^2) + \frac{1}{2} l(g'^2 + k^2) - \frac{1}{2} l(k^2 - x^2),$$

$$\frac{\delta . lH}{\delta k} = \frac{-k}{g^2 - k^2} + \frac{k}{g'^2 + k^2} - \frac{k}{k^2 - x^2}$$
$$= k\left(\frac{1}{k^2 - g^2} + \frac{1}{k^2 + g'^2} - \frac{1}{k^2 - x^2}\right) = \frac{k.\,W''}{-(k^2 - x^2)\,K},$$

en faisant de nouveau

$$(189)\quad \left\{ \begin{aligned} W'' &= (k^2 + g'^2)(k^2 - x^2) + (k^2 - x^2)(k^2 - g^2) - (k^2 - g^2)(k^2 + g'^2) \\ &= \{ k^4 + (g'^2 - x^2)\,k^2 - g'^2 x^2 \} + \{ k^4 - (x^2 + g^2)\,k^2 + g^2 x^2 \} \\ &\quad - \{ k^4 + (g'^2 - g^2)\,k^2 - g^2 g'^2 \} \\ &= k^4 - 2x^2 k^2 - \{ (g'^2 - g^2)\,x^2 - g^2 g'^2 \}, \end{aligned} \right.$$

on aura donc de nouveau, comme plus haut,

$$\frac{\delta H}{\delta k} = H \frac{\delta . lH}{\delta k} = H \frac{kW''}{-(k^2 - x^2)\,K} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{k^2 - x^2}} \frac{-kW''}{(k^2 - x^2)\,K}$$
$$= \frac{-kW''}{\sqrt{K}\,(k^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

valeur qui, étant remise dans l'égalité précédente (188) en même temps que celle (187) de H, la transformera successivement dans la suivante :

$$(190)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta^2 (P''\Delta'' + Q'')}{\delta x\, \delta k} &= \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \left[\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{k^2 - x^2}} \frac{\delta \Psi_3}{\delta k} + \Psi_3 (x^2, k^2) \frac{-kW''}{\sqrt{K}\,(k^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &= \frac{-1}{\sqrt{K}} \left[\frac{K}{\sqrt{K}} \cdot \frac{\delta \Psi_3}{\delta . k^2} 2k + \frac{-\Psi_3 (x^2, k^2)}{k^2 - x^2} \frac{kW''}{\sqrt{K}} \right] \\ &= \frac{-k}{\sqrt{X}\sqrt{K}} \left[2K \frac{\delta \Psi_3}{\delta . k^2} + \frac{\Psi_3 (x^2, k^2)\, W''}{x^2 - k^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Ayant ainsi calculé successivement les trois termes de l'expression (155), nous aurons donc, en ajoutant les trois égalités (174), (190) et (156), réduites à leurs premiers et derniers membres,

$$(191)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\delta^2 J}{\delta x\,\delta k} &= \frac{k}{\sqrt{X}\sqrt{K}}\left(2x^2(x^2-1)\frac{\delta\Phi_3}{\delta.x^2}+\frac{\Phi_3(x^2,k^2)\,W'}{x^2-k^2}\right)\\ &\quad+\frac{k}{\sqrt{X}\sqrt{K}}\left(-2K\frac{\delta\Psi_3}{\delta.k^2}-\frac{\Psi_3(x^2,k^2)\,W''}{x^2-k^2}\right)\\ &\quad+\frac{k}{\sqrt{X}\sqrt{K}}\lambda(x^2+k^2-g^2)\\ &= \frac{k}{\sqrt{X}\sqrt{K}}\left(\Phi_4(x^2,k^2)+\frac{\Psi_5(x^2,k^2)}{x^2-k^2}\right),\end{aligned}\right.$$

en désignant encore une fois par Φ_4 et Ψ_5 les nouveaux polynômes en x^2 et k^2

$$(192)\quad \left\{\begin{aligned}\Phi_4(x^2,k^2) &= 2x^2(x^2-1)\frac{\delta\Phi_3}{\delta.x^2}-2K\frac{\delta\Psi_3}{\delta.k^2}+\lambda(x^2+k^2-g^2),\\ \Psi_5(x^2,k^2) &= \Phi_3(x^2,k^2)\,W'-\Psi_3(x^2,k^2)\,W''\\ &= \Phi_3(x^2,k^2)(x^4-2k^2x^2+k^2)\\ &\quad-\Psi_3(x^2,k^2)\{k^4-2x^2k^2-(g^2-g^2)x^2+g^2g'^2\},\end{aligned}\right.$$

eu égard aux définitions (173) de W′ et (189) de W″.

Or, le second de ces polynômes $\Psi_5(x^2,k^2)$, considéré par rapport à x^2, sera divisible par x^2-k^2, si l'on a, quel que soit k^2,

$$\begin{aligned}0=\Psi_5(k^2,k^2) &= \Phi_3(k^2,k^2)(-k^4+k^2)\\ &\quad-\Psi_3(k^2,k^2)\{-k^4-(g'^2-g^2)k^2+g^2g'^2\}\\ &= -\Phi_3(k^2,k^2)(k^4-k^2)\\ &\quad+\Psi_3(k^2,k^2)\{k^4+(g'^2-g^2)k^2-g^2g'^2\}\\ &= -\Phi_3(k^2,k^2)(k^2-1)k^2\\ &\quad+\Psi_3(k^2,k^2)(k^2-g^2)(k^2+g'^2),\end{aligned}$$

condition qui pourra être écrite aussi bien, en divisant par le produit $k^2(k^2-1)(k^2-g^2)(k^2+g'^2)$:

$$(193) \qquad 0 = -\frac{\Phi_3(k^2,k^2)}{(k^2-g^2)(k^2+g'^2)} + \frac{\Psi_3(k^2,k^2)}{k^2(k^2-1)}.$$

Calculons donc les deux polynômes en k^2, $\Phi_3(k^2,k^2)$ et $\Psi_3(k^2,k^2)$.

Quant au premier, la définition (171) du symbole $\Phi_3(x^2,k^2)$ donnera immédiatement

$$\begin{aligned}
\Phi_3(k^2,k^2) &= [\mathfrak{F}_2(k^2,k^2)(k^2+g'^2) - (k^2+g'^2)\{\gamma' k^2 + (-g'^2\gamma' + \beta' k^2 + \epsilon')\{ \\
&\qquad + (k^2+g'^2)\{f_2(k^2) - \mathfrak{F}_2(k^2,-g'^2)\{] \\
&= (k^2+g'^2)[\mathfrak{F}_2(k^2,k^2) - \{\gamma' k^2 + (-g'^2\gamma' + \beta' k^2 + \epsilon')\{ \\
&\qquad + \{f_2(k^2) - \mathfrak{F}_2(k^2,-g'^2)\{] \\
&= (k^2+g'^2)[\{(\alpha'+\beta'+\gamma')k^4 + (\delta'+\epsilon')k^2 + \eta'\{ \\
&\qquad - \{(\beta'+\gamma')k^2 - \gamma' g'^2 + \epsilon'\{ + f_2(k^2) \\
&\qquad - \{(\alpha' k^4 - \beta' g'^2 k^2 + \gamma' g'^4 + \delta' k^2 - \epsilon' g'^2 + \eta'\{] \\
&= (k^2+g'^2)[\beta' k^2(k^2-1+g'^2) + \epsilon'(k^2-1+g'^2) \\
&\qquad + \gamma'\{(k^4-g'^4) - (k^2-g'^2)\{ + f_2(k^2)] \\
&= (k^2+g'^2)[(\beta' k^2+\epsilon')(k^2-1+g'^2) \\
&\qquad + \gamma'(k^2-g'^2)\{(k^2+g'^2) - 1\{ + f_2(k^2)] \\
&= (k^2+g'^2)[\{(\beta' k^2+\epsilon') + \gamma'(k^2-g'^2)\{\{k^2 - (1-g'^2)\{ \\
&\qquad + f_2(k^2)] \\
&= (k^2+g'^2)[\{(\beta'+\gamma')k^2 - (g'^2\gamma' - \epsilon')\{(k^2-g^2) + f_2(k^2)],
\end{aligned}$$

et par conséquent :

$$(194) \qquad \frac{\Phi_3(k^2,k^2)}{(k^2-g^2)(k^2+g'^2)} = \{(\beta'+\gamma')k^2 - (g'^2\gamma' - \epsilon')\{ + \frac{f_2(k^2)}{k^2-g^2}.$$

Semblablement, la définition (186) du symbole $\Psi_3(x^2, k^2)$ donnera

$$\begin{aligned}
\Psi_3(k^2, k^2) &= [\mathcal{F}_2(k^2, k^2)(k^2-1) + (k^2-1)\{(\alpha''+\beta'')k^2 + (\alpha''+\delta'')\}] \\
&\qquad + (k^2-1)\{f_2(k^2) - \mathcal{F}_2(1, k^2)\} \\
&= (k^2-1)[\{(\alpha''+\beta''+\gamma'')k^4 + (\delta''+\epsilon'')k^2 + \eta''\} \\
&\qquad + \{(\alpha''+\beta'')k^2 + (\alpha''+\delta'')\} \\
&\qquad + \{f_2(k^2) - (\alpha''+\beta''k^2+\gamma''k^4+\delta''+\epsilon''k^2+\eta'')\}] \\
&= (k^2-1)[\{\alpha''(k^4+k^2) + \beta''k^4 + \delta''k^2\} + f_2(k^2)] \\
&= (k^2-1)[k^2\{\alpha''(k^2+1) + \beta''k^2 + \delta''\} + f_2(k^2)] \\
&= (k^2-1)[k^2\{(\alpha''+\beta'')k^2 + (\alpha''+\delta'')\} + f_2(k^2)],
\end{aligned}$$

d'où par conséquent :

$$(195) \qquad \frac{\Psi_3(k^2, k^2)}{k^2(k^2-1)} = \{(\alpha''+\beta'')k^2 + (\alpha''+\delta'')\} + \frac{f_2(k^2)}{k^2}.$$

En retranchant donc l'égalité (194) de cette dernière (195), la condition (193), qu'il est nécessaire de remplir pour arriver à la forme voulue, deviendra tout d'abord

$$\begin{aligned}
0 = &-\left[(\beta'+\gamma')k^2 - (g'^2\gamma' - \epsilon') + \frac{f_2(k^2)}{k^2-g^2}\right] \\
&+\left[(\alpha''+\beta'')k^2 + (\alpha''+\delta'') + \frac{f_2(k^2)}{k^2}\right].
\end{aligned}$$

Cela posé, pour plus de précision, faisons, comme pour les polynômes $\mathcal{F}_2(x^2, k^2)$ et $\mathcal{F}_2(x^2, k^2)$ (150),

$$(196) \qquad \begin{cases} f_2(x^2) = \theta' x^4 + \zeta' x^2 + \xi', \\ f_2(k^2) = \theta'' k^4 + \zeta'' k^2 + \xi''. \end{cases}$$

En récrivant simplement k^2 à la place de x^2 dans le premier trinôme, puis effectuant les divisions, la condition en question sera donc définitivement

$$\begin{aligned}0 &= -\left[(\beta'+\gamma')\,k^2-(g'^2\gamma'-\epsilon')+\left(\theta'k^2+(\theta'g^2+\zeta')+\frac{f_2(g^2)}{k^2-g^2}\right)\right]\\&\quad+\left[(\alpha''+\beta'')\,k^2+(\alpha''+\delta'')+\left(\theta''k^2+\zeta''+\frac{\xi''}{k^2}\right)\right]\\&=[-(\beta'+\gamma'+\theta')+(\alpha''+\beta''+\theta'')]\,k^2\\&\quad+[(g'^2\gamma'-\epsilon')-(\theta'g^2+\zeta')+(\alpha''+\delta'')+\zeta'']-\frac{f_2(g^2)}{k^2-g^2}+\frac{\xi''}{k^2},\end{aligned}$$

et, devant être remplie quel que soit k^2, elle équivaudra par conséquent en fait aux quatre suivantes :

$$(197)\quad\begin{cases}0=-(\beta'+\gamma'+\theta')+(\alpha''+\beta''+\theta''),\\0=(g'^2\gamma'-\epsilon')-(g^2\theta'+\zeta')+(\alpha''+\delta'')+\zeta'',\\0=f_2(g^2)=\theta'g^4+\zeta'g^2+\xi',\\0=\xi''.\end{cases}$$

Les deux premières détermineront deux des coefficients des trinômes (196) en fonction des autres, soit par exemple θ'' et ζ'', en leur assignant les valeurs :

$$(198)\quad\begin{cases}\theta''=(\beta'+\gamma'+\theta')-(\alpha''+\beta''),\\\zeta''=-(g'^2\gamma'-\epsilon')+(g^2\theta'+\zeta')-(\alpha''+\delta'').\end{cases}$$

Cela fait, en tirant de même de la troisième la valeur

$$\xi'=-(\theta'g^4+\zeta'g^2),$$

l'expression du premier trinôme (196) deviendra

$$\begin{aligned}f_2(x^2)&=(\theta'x^4+\zeta'x^2)-(\theta'g^4+\zeta'g^2)\\&=\theta'(x^4-g^4)+\zeta'(x^2-g^2)\\&=[\theta'(x^2+g^2)+\zeta'](x^2-g^2),\end{aligned}$$

et, dès lors, on aura à la fois, eu égard à la quatrième condition (197),

$$\frac{f_2(x^2)}{x^2-g^2} = \theta' x^2 + (g^2\theta' + \zeta'), \qquad \frac{f_2(k^2)}{k^2} = \theta'' k^2 + \zeta'';$$

d'où il suit qu'en tenant compte des valeurs précédemment acquises (169) et (184), les deux quantités Q′ et Q″ (151) deviendront elles-mêmes respectivement :

$$(199)\quad \begin{cases} Q' = ix\sqrt{\mathfrak{X}}[(x^2+g'^2)\,\{\,\theta' x^2 + (g^2\theta' + \zeta')\,\{\,\varphi_2 \\ \qquad\qquad - \mathfrak{F}_2(x^2, -g'^2)\,Z(\varphi_2, k_2)], \\ Q'' = ik\sqrt{\mathrm{K}}\,[-(1-k^2)(\theta'' k^2 + \zeta'')\,\varphi_1 - \mathfrak{F}_2(1, k^2)\,Z(\varphi_1, k_1)]. \end{cases}$$

Cela fait, la condition proposée (193) étant ainsi satisfaite, nous aurons maintenant, en effectuant la division,

$$\frac{\Psi_5(x^2, k^2)}{x^2 - k^2} = \Psi_4(x^2, k^2),$$

cette dernière fonction Ψ_4 étant encore un polynôme du quatrième degré en x^2 et k^2, et par conséquent l'expression précédente (191) de $\frac{\delta^2 J}{\delta x\,\delta k}$ se trouvera bien, comme on le voulait, réduite à la forme

$$(200)\quad \frac{\delta^2 J}{\delta x\,\delta k} = \frac{k}{\sqrt{\mathrm{X}}\sqrt{\mathrm{K}}}[\Phi_4(x^2, k^2) + \Psi_4(x^2, k^2)] = \frac{k}{\sqrt{\mathrm{X}}\sqrt{\mathrm{K}}}\Pi_4(x^2, k^2),$$

le symbole Π_4 désignant un nouveau polynôme du quatrième degré en x^2 et k^2.

En se reportant à l'expression antérieure (148) de $\frac{\delta^2 I}{\delta x\,\delta k}$, on voit donc que la condition originairement proposée par l'énoncé même du problème, savoir $\frac{\delta^2 I}{\delta x\,\delta k} = \frac{\delta^2 J}{\delta x\,\delta k}$, sera vérifiée à l'aide de la simple identification de deux polynômes à deux variables du 4e degré, c'est-à-dire en établissant un nombre $\frac{1}{2}5.6 = 5.3 = 15$

d'équations entre les coefficients des termes correspondants dans les deux polynômes, équations linéaires par rapport aux inconnues, à savoir les coefficients indéterminés des polynômes $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{f}_2$, f_2, f_2 et la constante λ de la quantité J, mais qui ne seront pas homogènes par rapport à ces inconnues, du moment que les seconds membres seront les coefficients de la dérivée $\frac{\delta^2 I}{\delta x\, \delta k}$, c'est-à-dire, en fait, ceux de la quantité I elle-même qui sont supposés donnés.

Pour que le problème soit possible et déterminé, il faut donc qu'après toutes les déterminations déjà effectuées, nous disposions encore de 15 coefficients indéterminés dans J, et de *quinze* seulement. Or, tel est bien effectivement l'état actuel de la question, car il nous reste uniquement les quinze coefficients disponibles

$$(201) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha', \ \beta', \ \gamma', \ \delta', \ \epsilon', \ \eta', \ \theta', \ \zeta', \\ \alpha'', \ \beta'', \ \gamma'', \ \delta'', \ \epsilon'', \ \eta'', \ \lambda, \end{array} \right.$$

lesquels permettront l'identification demandée et seront alors complètement déterminés par elle, de la façon que nous venons de dire, en fonction des valeurs arbitrairement données des coefficients $\alpha, \beta, \ldots, \xi$ de la quantité I.

Si l'on veut symboliser commodément le système des quinze équations linéaires sur lequel repose la détermination en question, il faudra poser, suivant le mode de notation de l'Algèbre Supérieure moderne,

$$x^2 = u, \qquad k^2 = v, \qquad 1 = w;$$

et alors le polynôme $\Pi_4 (x^2, k^2)$ de l'expression précédente (200) représentera une forme ternaire du 4e degré, telle que

$$\Pi_4 (x^2, k^2) = \sum_{l,m,n} \mathcal{A}_{l,m,n}\, u^l v^m w^n, \qquad \left\{ \begin{array}{l} l, m, n = 0, 1, 2, 3, 4, \\ l + m + n = 4. \end{array} \right.$$

le coefficient $\mathcal{A}_{l,m,n}$ étant une fonction linéaire et homogène, complètement déterminée par la série des opérations que nous

avons indiquées, des quinze coefficients seuls disponibles, c'est-à-dire telle que

$$\mathcal{A}_{l,m,n} = \Phi_{l,m,n}\,(\alpha', \beta', \ldots, \theta', \zeta'; \alpha'', \beta'', \ldots, \eta''; \lambda),$$

les coefficients de cette forme $\Phi_{l,m,n}$ étant eux-mêmes entiers par rapport à g^2 ou g'^2, ainsi qu'il résulte des opérations successives dont elle procède (*), en sorte que l'expression précitée (200) de $\frac{\delta^2 J}{\delta x\,\delta k}$ se présentera elle-même sous la forme :

$$\frac{\delta^2 J}{\delta x\,\delta k} = \frac{k}{\sqrt{X}\sqrt{K}} \sum_{l,m,n} \Phi_{l,m,n}\,(\alpha', \beta', \ldots, \zeta'; \alpha'', \beta'', \ldots, \eta''; \lambda)\, u^l v^m w^n.$$

Or, avec le même système de notation, l'expression (148) de $\frac{\delta^2 I}{\delta x\,\delta k}$ s'écrivant semblablement

$$\frac{\delta^2 I}{\delta x\,\delta k} = \frac{2k}{\sqrt{X}\sqrt{K}} [u^0 (\alpha\, v^0 w^4 + \gamma\, v^1 w^3 + \epsilon\, v^2 w^2 + \theta\, v^3 w^1 + \xi\, v^4 w^0) + u^1 (\beta\, v^0 w^3 + \delta\, v^1 w^2 + \eta\, v^2 w^1 + \zeta\, v^3 w^0)],$$

l'identification des expressions des deux dérivées secondes sera dès lors assurée en posant, entre les quinze inconnues, les quinze équations linéaires et non homogènes, dont les coefficients sont entiers en g^2 ou g'^2, savoir

$$\left\{\begin{array}{llll} \Phi_{0,0,4} = 2\alpha, & \Phi_{0,1,3} = 2\gamma, & \Phi_{0,2,2} = 2\epsilon, & \Phi_{0,3,1} = 2\theta, \\ & \Phi_{0,4,0} = 2\xi, & \Phi_{1,0,3} = 2\beta, & \Phi_{1,1,2} = 2\delta, \\ & & \Phi_{1,2,1} = 2\eta, & \Phi_{1,3,0} = 2\zeta, \\ & \Phi_{2,0,2} = 0, & \Phi_{2,1,1} = 0, & \Phi_{2,2,0} = 0, \\ & \Phi_{3,0,1} = 0, & \Phi_{3,1,0} = 0, & \Phi_{4,0,0} = 0; \end{array}\right.$$

(*) En effet, les fonctions originaires $\mathcal{F}_4$ (168) et $\mathcal{J}_4$ (183) étant elles-mêmes entières en g^2 ou g'^2, les seules divisions que nous ayons effectuées l'ont été par les diviseurs $k^2 + g'^2$, $x^2 - 1$, et $x^2 - k^2$, dont les coefficients de la variable étant l'unité n'ont pu par suite introduire g^2 ou g'^2 en dénominateur. Il en est de même de toutes les autres opérations, qui se réduisent à des additions (algébriques), des multiplications ou des différentiations.

et pour déterminer l'expression explicite de chacune des neuf quantités I_0, J_0, ..., I_4 séparément, il suffira dans ce système de supposer égal à l'unité le coefficient de la quantité considérée dans la définition (144) de I, et égal à zéro le coefficient de chacune des autres, ainsi que nous l'avons déjà dit au début de cette démonstration.

Une fois la résolution de ce système effectuée, et les valeurs ainsi trouvées pour les quinze coefficients (201), ainsi que celles qui en résulteront pour θ'' et ζ'' par les deux équations (198), étant supposées remises dans les définitions (150) de P′ et P″, (152) de R, et les expressions (199) obtenues pour Q′ et Q″, puis celles-ci elles-mêmes étant remises dans les valeurs (153) de P et Q, la dite valeur de P pourra être ramenée alors, en tenant compte des définitions (149) de Δ' et Δ'', à la forme plus simple

$$\left\{\begin{aligned} P &= P'\Delta' + P''\Delta'' = \mathcal{F}_2(x^2, k^2).\, x\sqrt{(1-x^2)(k^2-x^2)}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}} \\ &\qquad + \mathcal{J}_2(x^2, k^2).\, x\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}\,\frac{\sqrt{k^2-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= x\,\frac{\sqrt{k^2-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}\,[\mathcal{F}_2(x^2, k^2)(1-x^2) + \mathcal{J}_2(x^2, k^2)(g'^2+k^2)] \\ &= ix\,\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}\,\mathcal{F}_3(x^2, k^2), \end{aligned}\right.$$

ce nouveau polynôme $\mathcal{F}_3(x^2, k^2)$ — qui n'est évidemment pas celui que nous avons introduit dans nos calculs par la définition (163) — vérifiant ainsi, de par sa définition même, la condition $\mathcal{F}_3(1, -g'^2) = 0$. Et l'on voit dès lors, eu égard à la première expression (154) de J ainsi qu'à la définition (139) de $\mathfrak{X}$, qu'en désignant, maintenant que tous les calculs sont achevés, par α', β', ..., ϵ'; α'', β'', ..., ϵ'', d'autres constantes que celles qui figurent dans ces calculs, nous avons en définitive démontré le nouveau Théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Les neuf premières quantités* I_n, J_n *ont, chacune séparément, une expression de la forme*

$$
\left.\begin{matrix} I_0, I_1, I_2, I_3, I_4 \\ J_0, J_1, J_2, J_3 \end{matrix}\right\} = i\Big[x\,\mathcal{F}_3(x^2,k^2)\,\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}
$$

$$
+ x\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{g^2-x^2}\,\{(\alpha' x^2+\beta')(x^2+g'^2)\,\varphi_2
$$

$$
+ (\gamma' x^4+\delta' x^2+\epsilon')\,Z(\varphi_2,k_2)\,\{
$$

$$
- k\sqrt{g^2-k^2}\,\sqrt{g'^2+k^2}\,\{(\alpha'' k^2+\beta'')(1-k^2)\,\varphi_1
$$

$$
+ (\gamma'' k^4+\delta'' k^2+\epsilon'')\,Z(\varphi_1,k_1)\,\{
$$

$$
+ \lambda g'\,\{\Pi(\varphi_2,h_2,k_2) - \Pi(\varphi_1,h_1,k_1)\,\{\Big], \tag{202}
$$

le symbole $\mathcal{F}_3(x^2,k^2)$ *désignant un polynôme du troisième degré en* x^2 *et* k^2 *qui vérifie la condition* $\mathcal{F}_3(1,-g'^2)=0$, *et dont les divers coefficients, ainsi que les constantes* $\alpha', \beta', \ldots, \epsilon'$; $\alpha'', \beta'', \ldots, \epsilon''$; *et* λ *sont des fonctions rationnelles de* g^2 *ou* g'^2.

Il est bien évident, d'ailleurs, d'après la façon même dont ces expressions ont été obtenues, que les degrés des divers polynômes mis en évidence par cet énoncé sont simplement ici des *degrés maximum* et, par conséquent, que ces degrés pourront éventuellement se trouver abaissés, soit pour quelques polynômes seulement dans l'expression d'une même inconnue, soit pour tous à la fois dans les expressions de certaines inconnues, par le fait de la disparition d'une ou plusieurs des puissances les plus élevées des variables dans ces polynômes.

V

Nous voulons maintenant étendre, dans ce paragraphe, à toutes les fonctions I_n, J_n à indice positif, la détermination formulée par le Théorème IV que nous venons d'établir.

Nous y arriverons, sans trop de difficultés, par une généralisation convenable des procédés qui nous ont fourni les deux Théorèmes II et III, en les appliquant cette fois aux deux types d'intégrale double, que nous désignerons par les symboles $I^{(n)}$ et $J^{(n)}$ en les définissant par les deux égalités

$$(203)\quad I^{(n)} = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2}(s-t)\,[(2n+3)\,(s+t-f)+2\varpi]\times (s+t+\varpi-f)^{n-\frac{1}{2}}\frac{ds}{\sqrt{S}}\frac{dt}{\sqrt{T}},$$

$$(204)\quad J^{(n)} = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2}(s-t)\,[2st-m^2\,(s+t-f)]\times (s+t+\varpi-f)^{n-\frac{1}{2}}\frac{ds}{\sqrt{S}}\frac{dt}{\sqrt{T}},$$

et nous basant, pour entreprendre cette généralisation, sur ce fait que les quatre types d'intégrale double $I^{(0)}$ (37) et $I^{(1)}$ (140) d'une part, et $J^{(0)}$ (87) et $J^{(1)}$ (141) d'autre part, qui nous ont fourni respectivement les équations (II) et (IV) d'une part, et (III) et (V) d'autre part (pp. 63-66), entre les huit premières quantités I_n, J_n, ne sont manifestement que les premiers termes de la série correspondant aux valeurs 0 et 1 de l'exposant n pour chacun des deux types ci-dessus (203) et (204).

Cette observation faite, bien que chacun de ces deux types doive nous conduire évidemment, comme résultat, à une formule distincte, néanmoins, comme à chaque phase du calcul nous devons leur appliquer, ou exactement le même procédé, ou un procédé peu différent, nous conduirons donc les calculs *parallèle-*

ment en quelque sorte pour les deux types, de manière à parvenir au résultat final en même temps pour eux deux, chaque opération accomplie sur l'un ayant correspondu immédiatement à la même opération ou une opération analogue exécutée sur l'autre.

Ce plan général de calcul étant ainsi arrêté, notre méthode consistera donc encore, comme pour les quatre types particuliers précités, à déterminer pour chacun des deux types généraux proposés son expression de deux manières différentes, savoir, une première fois en substituant au système des variables s et t le système des variables ω et θ définies par les équations (35) de notre Chap. I, et une seconde fois en remplaçant séparément les variables s et t par les variables correspondantes x et k définies par les équations (2) du § I ; puis, cela fait, à égaler les deux expressions ainsi obtenues pour le même type.

Cherchons donc maintenant la première expression des deux types en question par le procédé que nous venons de dire.

Sans qu'il soit besoin de répéter une troisième fois les explications déjà données deux fois à propos du changement de variables précité, et empruntées pour la majeure partie à notre Chap. I, il est visible qu'en omettant tout d'abord l'indication des limites pour les nouvelles variables, et ayant égard encore aux équations (35) et (38^{bis}) du dit Chapitre, les deux quantités en question (203) et (204) prendront alors les nouvelles formes

$$\begin{cases} \mathrm{I}^{(n)} = \dfrac{1}{2}\iint (s-t)\,[(2n+3)\,\theta + 2\varpi]\,(\varpi+\theta)^{n-\frac{1}{2}}\,\dfrac{\pm\,\delta(s,t)}{\delta(\omega,\theta)}\,\dfrac{d\omega\,d\theta}{\sqrt{\Omega}}, \\ \mathrm{J}^{(n)} = \dfrac{1}{2}\iint (s-t)\,(2\omega - m^2\theta)\,(\varpi+\theta)^{n-\frac{1}{2}}\,\dfrac{\pm\,\delta(s,t)}{\delta(\omega,\theta)}\,\dfrac{d\omega\,d\theta}{\sqrt{\Omega}}, \end{cases}$$

lesquelles, en tenant compte de l'égalité (37) de notre Chap. I, se simplifieront comme il suit

$$\begin{cases} \mathrm{I}^{(n)} = \displaystyle\int \left(\int \frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right) \frac{1}{2}\,[(2n+3)\,\theta + 2\varpi]\,(\varpi+\theta)^{n-\frac{1}{2}}\,d\theta, \\ \mathrm{J}^{(n)} = \displaystyle\int \left(\int \frac{2\omega - m^2\theta}{2\sqrt{\Omega}}\,d\omega\right)(\varpi+\theta)^{n-\frac{1}{2}}\,d\theta, \end{cases}$$

et deviendront ensuite, eu égard à la valeur de Ω du § III ci-dessus,

en y introduisant alors les limites des variables, comme dans notre Chap. I et au début des §§ II et III,

$$\begin{cases} \mathrm{I}^{(n)} = \sum_{\epsilon} \pm \int_{\epsilon+\eta_1-f}^{\epsilon+\eta_2-f} \left(\int_{\Theta}^{E+\epsilon\theta} \frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}} \right) \frac{1}{2} \left[(2n+3)\,\theta + 2\varpi \right] (\varpi+\theta)^{n-\frac{1}{2}}\, d\theta, \\ \mathrm{J}^{(n)} = \sum_{\epsilon} \pm \int_{\epsilon+\eta_1-f}^{\epsilon+\eta_2-f} \left(\int_{\Theta}^{E+\epsilon\theta} \frac{d.\sqrt{\Omega}}{d\omega}\, d\omega \right) (\varpi+\theta)^{n-\frac{1}{2}}\, d\theta ; \end{cases}$$

c'est-à-dire, avec les notations simplifiées (40), en tenant compte de nouveau, pour la première quantité de la formule (60) et des symboles (61) et (62) du Chap. I, et pour la seconde de l'égalité (91) du § III,

$$\begin{cases} \mathrm{I}^{(n)} = \sum_{\epsilon} \pm \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[2 \log \mathrm{F}(\theta) - \mathfrak{F}(\Theta, \theta) \right] \frac{1}{2} \left[(2n+3)\,\theta + 2\varpi \right] (\varpi+\theta)^{n-\frac{1}{2}}\, d\theta, \\ \mathrm{J}^{(n)} = \sum_{\epsilon} \pm \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\sqrt{\mathrm{E}}\, \frac{\Delta\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}} - \sqrt{\Theta\,(\Theta - m^2\theta)} \right] (\varpi+\theta)^{n-\frac{1}{2}}\, d\theta, \end{cases}$$

et se réduiront enfin, grâce encore au Théorème des pages 60-61 de notre Chapitre I, simplement aux suivantes :

$$(205) \quad \begin{cases} \mathrm{I}^{(n)} = \sum_{\epsilon} \pm \int_{\theta_1}^{\theta_2} 2 \log \mathrm{F}(\theta) . \frac{1}{2} \left[(2n+3)\,\theta + 2\varpi \right] (\varpi+\theta)^{n-\frac{1}{2}}\, d\theta, \\ \mathrm{J}^{(n)} = \sum_{\epsilon} \pm \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\mathrm{E}}\, (\varpi+\theta)^{n-1}\, \Delta\theta\, d\theta. \end{cases}$$

Or, quant à la première, la différentiation donnant encore

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left[\theta\,(\theta+\varpi)^{n+\frac{1}{2}} \right] &= (\theta+\varpi)^{n+\frac{1}{2}} + \theta . \left(n + \frac{1}{2} \right) (\theta+\varpi)^{n-\frac{1}{2}} \\ &= (\theta+\varpi)^{n-\frac{1}{2}} \left[(\theta+\varpi) + \frac{2n+1}{2}\,\theta \right] \\ &= \frac{1}{2} (\theta+\varpi)^{n-\frac{1}{2}} \left[2\,(\theta+\varpi) + (2n+1)\,\theta \right] \\ &= \frac{1}{2} (\theta+\varpi)^{n-\frac{1}{2}} \left[(2n+3)\,\theta + 2\varpi \right], \end{aligned}$$

d'où l'on conclut inversement, comme au § II (p. 26-27),

$$\int \frac{1}{2}(\theta+\varpi)^{n-\frac{1}{2}}[(2n+3)\theta+2\varpi]\,d\theta = \theta(\theta+\varpi)^{n+\frac{1}{2}}+C,$$

l'intégration, par parties, donnera donc actuellement, en rappelant de nouveau la formule (68bis) du Chapitre I, et la définition (41) du symbole $\Delta\theta$, dans le § II,

$$\begin{aligned}
&\int 2\log F(\theta).\frac{1}{2}(\theta+\varpi)^{n-\frac{1}{2}}[(2n+3)\theta+2\varpi]\,d\theta \\
&= 2\log F(\theta).\theta(\theta+\varpi)^{n+\frac{1}{2}} - \int \theta(\theta+\varpi)^{n+\frac{1}{2}}.\frac{1}{\theta}\left(1-\frac{\sqrt{E}\sqrt{\varpi+\theta}}{\Delta\theta}\right)d\theta \\
&= \left[2\log F(\theta).\theta(\theta+\varpi)^{n+\frac{1}{2}} - \int(\theta+\varpi)^{n+\frac{1}{2}}\,d\theta\right] + \sqrt{E}\int\frac{(\theta+\varpi)^{n+1}}{\Delta\theta}d\theta,
\end{aligned}$$

et par conséquent si, après avoir appliqué cette formule de quadrature à la première des deux expressions (205), on a égard de nouveau au même Théorème du Chapitre I déjà invoqué tout à l'heure, ces deux expressions prendront donc ainsi respectivement la forme simple :

$$(206)\qquad \left\{\begin{aligned}
I^{(n)} &= \sum_{\epsilon} \pm\sqrt{E}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{(\varpi+\theta)^{n+1}}{\Delta\theta}d\theta, \\
J^{(n)} &= \sum_{\epsilon} \pm\sqrt{E}\int_{\theta_1}^{\theta_2}(\varpi+\theta)^{n-1}\Delta\theta\,d\theta.
\end{aligned}\right.$$

Cela posé, pour effectuer ces deux quadratures, nous substituerons à la variable θ une nouvelle variable z choisie d'après les considérations suivantes :

Observant, comme dans les §§ I, II et III, qu'en raison des valeurs (10) de s_1 et t_1, savoir $s_1 = t_1 = l^2$, les quantités

$$S_1 = (l^2 - s_1)(n^2 + s_1), \qquad \text{et} \qquad T_1 = (l^2 - t_1)(n^2 + t_1)$$

sont nulles d'après leur définition même, en sorte que les deux sommes en question (206) ne comprendront chacune que les deux seuls termes correspondant aux déterminations $\epsilon = \epsilon_2 = s_2$ et $\epsilon = \epsilon_4 = t_2$, dont les expressions explicites sont, d'après les mêmes valeurs (10), en maintenant l'hypothèse (88) $l^2 = 0$ du § III,

$$(207) \qquad s_2 = m^2x^2 \qquad \text{et} \qquad t_2 = m^2(g^2 - k^2),$$

il s'en suivra donc que, dans l'un et l'autre cas, ϵ sera de la forme $\epsilon = m^2\mathsf{E}$, la quantité E comportant, respectivement dans chaque cas, les deux déterminations :

$$(208) \qquad \mathsf{E}_2 = x^2 \qquad \text{et} \qquad \mathsf{E}_4 = g^2 - k^2.$$

Partant de là, faisons donc, pour l'homogénéité, en tenant compte des valeurs (1) de g'^2 et ϖ,

$$(209) \quad \left\{ \begin{array}{ll} & \varpi + \theta = m^2z, \qquad \text{d'où} \qquad d\theta = m^2dz, \\ \text{et} & \theta = m^2z - m^2g'^2 = m^2(z - g'^2), \end{array} \right.$$

nous aurons alors, par ces diverses valeurs et la définition des symboles f et E [formules (14) et (53) du Chap. I],

$$(210) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = -l^2 = n^2 + m^2, \qquad n^2 = -m^2, \\ f = m^2, \qquad \epsilon = m^2\mathsf{E}, \qquad m^2\theta = m^4(z - g'^2), \end{array} \right.$$

$$(211) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{E} = (l^2 - \epsilon)(n^2 + \epsilon) = -\epsilon(-m^2 + \epsilon) = \epsilon(m^2 - \epsilon) \\ \quad = m^2\mathsf{E}(m^2 - m^2\mathsf{E}) = m^4\mathsf{E}(1 - \mathsf{E}), \end{array} \right.$$

$$(212) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{E} + \epsilon\theta = m^4\mathsf{E}(1 - \mathsf{E}) + m^2\mathsf{E}.m^2(z - g'^2) \\ \qquad = m^4\mathsf{E}[(1 - \mathsf{E}) + (z - g'^2)] \\ \qquad = m^4(z + g^2 - \mathsf{E}), \end{array} \right.$$

et nous en conclurons d'abord

$$\left\{\begin{aligned} l^2 - \epsilon + \theta &= -m^2\mathsf{E} + m^2(z - g'^2) \\ &= m^2[z - (\mathsf{E} + g'^2)] = m^2(z - \mathsf{E}'), \\ n^2 + \epsilon - \theta &= -m^2 + m^2\mathsf{E} - m^2(z - g'^2) \\ &= -m^2[z + (1 - \mathsf{E} - g'^2)] = -m^2\cdot(z - \mathsf{E}''), \end{aligned}\right.$$

en désignant, comme tout à l'heure, par E' et E'' les fonctions linéaires de E

$$\mathsf{E}' = \mathsf{E} + g'^2, \qquad \mathsf{E}'' = \mathsf{E} - g^2; \tag{213}$$

puis de là, enfin, en vertu de la définition (41) du symbole $\Delta\theta$,

$$\begin{aligned} (\Delta\theta)^2 &= (\varpi + \theta)(l^2 - \epsilon + \theta)(n^2 + \epsilon - \theta) \\ &= m^2 z.\, m^2(z - \mathsf{E}').[-m^2(z - \mathsf{E}'')] \\ &= -m^6 z(z - \mathsf{E}')(z - \mathsf{E}'') = -m^6\mathsf{Z}, \end{aligned}$$

en convenant de faire désormais, pour toute la suite de ce travail

$$\mathsf{Z} = z(z - \mathsf{E}')(z - \mathsf{E}''), \tag{214}$$

auquel cas l'expression précédente de $\Delta\theta$ s'écrira très simplement:

$$\Delta\theta = im^3\sqrt{\mathsf{Z}}. \tag{215}$$

Étant ainsi munis de ces différentes valeurs, nous obtiendrons alors, pour l'expression transformée, à l'aide de la variable z, des éléments des deux quadratures envisagées (206), d'une part

$$\left\{\begin{aligned} \frac{(\varpi + \theta)^{n+1}}{\Delta\theta}\,d\theta &= \frac{(m^2 z)^{n+1}}{im^3\sqrt{\mathsf{Z}}}\,m^2\,dz = \frac{(m^2)^{n+2}}{im^3}\,\frac{z^{n+1}\,dz}{\sqrt{\mathsf{Z}}} \\ &= -2i\mathsf{M}\,\frac{z^{n+1}\,dz}{2\sqrt{\mathsf{Z}}}, \end{aligned}\right. \tag{216}$$

en convenant de faire, pour abréger et faciliter l'écriture,

$$\mathsf{M} = m^{2n+1}, \tag{217}$$

et d'autre part

$$(218)\quad \left\{\begin{aligned}(\varpi+\theta)^{n\ 1}\Delta\theta\,d\theta &= (m^2z)^{n-1}.\,im^3\sqrt{Z}\,.\,m^2dz = im^{2n+3}z^{n-1}\frac{Z\,dz}{\sqrt{Z}}\\ &= iMm^2.\,z^{n-1}.\,z\,(z-E')\,(z-E'')\,\frac{dz}{\sqrt{Z}}\\ &= iMm^2.\,z^n\,[z^2-(E'+E'')+E'E'']\,\frac{dz}{\sqrt{Z}}\\ &= 2iMm^2[z^{n+2}-(E'+E'')z^{n+1}+E'E''\,z^n]\,\frac{dz}{2\sqrt{Z}}.\end{aligned}\right.$$

Dès lors, si nous convenons de faire encore pour toute la suite du présent Mémoire, l'exposant n étant un entier quelconque,

$$(219)\qquad Z_n = \int_0^z \frac{z^n\,dz}{2\sqrt{Z}},$$

et de désigner par $z^{(1)}$ et $z^{(2)}$ les deux valeurs de z correspondant aux limites θ_1 et θ_2 (40) de θ, c'est-à-dire d'après la définition (209) de z les deux quantités

$$(220)\quad \left\{\begin{aligned}z^{(1)} &= g'^2+\frac{\theta_1}{m^2} = g'^2+\frac{1}{m^2}(\epsilon+\eta_1-f),\\ z^{(2)} &= g'^2+\frac{\theta_2}{m^2} = g'^2+\frac{1}{m^2}(\epsilon+\eta_2-f),\end{aligned}\right.$$

les deux expressions en question (206) de $I^{(n)}$ et $J^{(n)}$ auront respectivement pour valeurs avec ces différentes notations :

$$(221)\quad \left\{\begin{aligned}I^{(n)} &= \sum_{\epsilon}\pm 2iM\sqrt{E}\,[-Z_{n+1}]_{z^{(1)}}^{z^{(2)}},\\ J^{(n)} &= \sum_{\epsilon}\pm 2iMm^2\sqrt{E}\,[Z_{n+2}-(E'+E'')\,Z_{n+1}+E'E''Z_n]_{z^{(1)}}^{z^{(2)}}.\end{aligned}\right.$$

Le problème d'intégration qui nous reste à résoudre consiste donc à ramener, conformément à la théorie des intégrales à diffé-

rentielles algébriques, les diverses quantités Z_n qui figurent dans ces expressions à leurs deux seuls éléments irréductibles Z_0 et Z_1, en outre d'un terme purement algébrique.

A cet effet, ayant par la définition (214) de Z,

$$\begin{cases} Z = z(z - E')(z - E'') = z^3 - (E' + E'')z^2 + E'E''z, \\ Z' = 3z^2 - 2(E' + E'')z + E'E'', \end{cases}$$

l'identité classique

$$\frac{d.z^m\sqrt{Z}}{dz} = mz^{m-1}\sqrt{Z} + z^m\frac{Z'}{2\sqrt{Z}} = \frac{z^m}{2\sqrt{Z}}\left(2m\frac{Z}{z} + Z'\right)$$

$$= \frac{z^m}{2\sqrt{Z}}[2m\{z^2 - (E' + E'')z + E'E''\} + \{3z^2 - 2(E' + E'')z + E'E''\}]$$

$$= \frac{z^m}{2\sqrt{Z}}[(2m+3)z^2 - (2m+2)(E' + E'')z + (2m+1)E'E'']$$

donnera, étant multipliée par dz et intégrée de 0 à z, la formule de réduction

$$z^m\sqrt{Z} = (2m+3)Z_{m+2} - (2m+2)(E' + E'')Z_{m+1} + (2m+1)E'E''Z_m,$$

ou bien :

$$(222)\quad \begin{cases} (2m+3)Z_{m+2} = z^m\sqrt{Z} + (2m+2)(E' + E'')Z_{m+1} \\ \qquad\qquad - (2m+1)E'E''Z_m. \end{cases}$$

Dès lors, si nous récrivons successivement 0, 1, 2, ..., à la place de m dans cette dernière formule, ce qui nous donnera la série d'égalités

$$(223)\quad \begin{cases} m = 0, & 3Z_2 = \sqrt{Z} + 2(E' + E'')Z_1 - E'E''Z_0, \\ m = 1, & 5Z_3 = z\sqrt{Z} + 4(E' + E'')Z_2 - 3E'E''Z_1, \\ m = 2, & 7Z_4 = z^2\sqrt{Z} + 6(E' + E'')Z_3 - 5E'E''Z_2, \\ \cdots & \cdots \end{cases}$$

et que nous reportions la valeur ainsi fournie par chaque égalité dans la suivante, il est facile de voir :

En premier lieu, que le degré soit en z, soit en E, des coefficients, tant de $\sqrt{Z}$ d'une part, que de Z_1 ou Z_0 d'autre part, augmentera à chaque fois d'une unité en passant de l'expression ainsi obtenue de l'une des quantités Z_n à celle de la suivante Z_{n+1}, en sorte que ce degré sera ainsi dans l'expression de Z_{m+2}, m pour le coefficient de $\sqrt{Z}$, $m+1$ pour celui de Z_1, et $m+2$ pour celui de Z_0.

Et en second lieu, la quantité Z_0 n'entrant que dans la première de ces égalités (223) seulement, que le facteur EE'' qui l'accompagne se retrouvera intégralement dans le coefficient de la dite quantité Z_0 pour chaque expression en question des diverses quantités Z_n, en sorte que pour la quantité Z_{m+2} ce coefficient, qui sera de degré $m+2$, ainsi que nous venons de le dire, aura par conséquent la forme $E'E''f_m(E)$, f_m désignant un polynôme de degré m.

D'où il suit, en résumé, que l'expression précitée de la dite quantité Z_{m+2} sera définitivement de la forme (*) :

$$(224) \qquad Z_{m+2} = \mathcal{F}_m(z, E)\sqrt{Z} + E'E''f_m(E)\,Z_0 + f_{m+1}(E)\,Z_1,$$

(*) On s'assure aisément *a posteriori* de l'exactitude de cette expression, en constatant que, si on l'admet pour deux valeurs successives $m-2$ et $m-1$ de l'indice m, la formule proposée (222) redonnera bien précisément une valeur de cette même forme pour la quantité suivante Z_{m+2}.

En effet, admettons donc que l'on ait ainsi à la fois

$$\begin{cases} Z_m = \mathcal{F}_{m-2}\cdot\sqrt{Z} + E'E''E_{m-2}\,Z_0 + E_{m-1}\,Z_1, \\ Z_{m+1} = \mathcal{F}_{m-1}\cdot\sqrt{Z} + E'E''E_{m-1}\,Z_0 + E_m Z_1, \end{cases}$$

en écrivant, pour abréger, simplement $\mathcal{F}_n$ à la place de $\mathcal{F}_n(z, E)$, et E_n au lieu de $f_n(E)$, la formule en question (222), étant écrite de la même manière, donnera alors

$$\begin{aligned}(2m+3)\,Z_{m+2} &= z^m\sqrt{Z} + (2m+2)(E'+E'')\left[\mathcal{F}_{m-1}\cdot\sqrt{Z} + E'E''E_{m-1}Z_0 + E_m Z_1\right] \\ &\quad - (2m+1)\,E'E''\left[\mathcal{F}_{m-2}\cdot\sqrt{Z} + E'E''E_{m-2}Z_0 + E_{m-1}Z_1\right], \\ &= \left[z^m + (2m+2)(E'+E'')\,\mathcal{F}_{m-1} - (2m+1)\,E'E''\,\mathcal{F}_{m-2}\right]\sqrt{Z} \\ &\quad + E'E''\left[(2m+2)(E'+E'')\,E_{m-1} - (2m+1)\,E'E''E_{m-2}\right]Z_0 \\ &\quad + \left[(2m+2)(E'+E'')\,E_m - (2m+1)\,E'E''E_{m-1}\right]Z_1 \\ &= \mathcal{F}_m\cdot\sqrt{Z} + E'E''E_m\,Z_0 + E_{m+1}\,Z_1. \end{aligned}$$

(c. q. f. d.)

le symbole $\mathcal{F}_m$ désignant un polynôme à deux variables de degré m, et les symboles f_m et f_{m+1} également des polynômes dont l'indice marque le degré.

Cette formule générale de quadrature, étant appliquée aux deux expressions en question (221), nous donnera aisément, pour la première en faisant dans la dite formule $m = n - 1$,

$$(225)\quad \mathrm{I}^{(n)} = 2i\mathrm{M}\sum_{\epsilon} \pm \sqrt{\mathrm{E}}\,[\mathcal{F}_{n-1}(z,\mathrm{E})\sqrt{\mathrm{Z}} + \mathrm{E}'\mathrm{E}''f_{n-1}(\mathrm{E})\,\mathrm{Z}_0 + f_n(\mathrm{E})\,\mathrm{Z}_1]_{z^{(1)}}^{z^{(2)}},$$

et pour la seconde en y faisant successivement $m=n$, $n-1$, $n-2$,

$$(226)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{J}^{(n)} &= 2i\mathrm{M}m^2\sum_{\epsilon} \pm \sqrt{\mathrm{E}}\,[\{\mathcal{F}_n(z,\mathrm{E})\sqrt{\mathrm{Z}} + \mathrm{E}'\mathrm{E}''f_n(\mathrm{E})\,\mathrm{Z}_0 + f_{n+1}(\mathrm{E})\mathrm{Z}_1\} \\ &\quad - (\mathrm{E}'+\mathrm{E}'')\{\mathcal{F}_{n-1}(z,\mathrm{E})\sqrt{\mathrm{Z}} + \mathrm{E}'\mathrm{E}''f_{n-1}(\mathrm{E})\mathrm{Z}_0 + f_n(\mathrm{E})\,\mathrm{Z}_1\} \\ &\quad + \mathrm{E}'\mathrm{E}''\{\mathcal{F}_{n-2}(z,\mathrm{E})\sqrt{\mathrm{Z}} + \mathrm{E}'\mathrm{E}''f_{n-2}(\mathrm{E})\mathrm{Z}_0 + f_{n-1}(\mathrm{E})\mathrm{Z}_1\}]_{z^{(1)}}^{z^{(2)}} \\ &= 2i\mathrm{M}m^2\sum_{\epsilon} \pm \sqrt{\mathrm{E}}\,[\Psi_n(z,\mathrm{E})\sqrt{\mathrm{Z}} + \mathrm{E}'\mathrm{E}''\psi_n(\mathrm{E})\,\mathrm{Z}_0 + \psi_{n+1}(\mathrm{E})\mathrm{Z}_1]_{z^{(1)}}^{z^{(2)}}, \end{aligned}\right.$$

expressions qu'il faudra expliciter successivement pour chacune des deux limites $z^{(1)}$ et $z^{(2)}$, et dans lesquelles, après cela fait, il ne restera plus alors qu'à calculer les quatre quantités $z^{(1)}$, $\mathrm{Z}^{(1)}$, $z^{(2)}$, $\mathrm{Z}^{(2)}$, et à interpréter les deux intégrales définies

$$(227)\qquad [\mathrm{Z}_0]_{z^{(1)}}^{z^{(2)}} = \int_{z^{(1)}}^{z^{(2)}} \frac{dz}{2\sqrt{\mathrm{Z}}} \qquad [\mathrm{Z}_1]_{z^{(1)}}^{z^{(2)}} = \int_{z^{(1)}}^{z^{(2)}} \frac{z\,dz}{2\sqrt{\mathrm{Z}}},$$

qui se trouveront mises en évidence par cette opération.

A cet effet, quant aux deux premières quantités tout d'abord, nous observerons que le trinôme sous le radical Z, défini par l'égalité (214), s'annulle pour la limite inférieure $z^{(1)}$; car, ayant, en général, par les définitions (2^{ter}) $s_1 = t_1 = l^2$, qui donnent avec l'hypothèse actuelle (210) $\eta_1 = 0$ quel que soit ϵ, la limite inférieure

de θ a donc pour expression, eu égard aux dites valeurs (210) de f et de ϵ,

$$\theta_1 = \epsilon + \eta_1 - f = m^2 E - m^2 = m^2 (E - 1);$$

et par conséquent, d'après la définition (209) de z, on aura, quant à la limite correspondante de cette variable,

$$\begin{aligned} m^2 z^{(1)} &= \varpi + \theta_1 = m^2 g'^2 + m^2 (E - 1) \\ &= m^2 [(1 - g^2) + (E - 1)] = m^2 (E - g^2) = m^2 E'', \end{aligned}$$

c'est-à-dire simplement $z^{(1)} = E''$, en vertu de la définition (213) de E''.

Maintenant, quant aux deux intégrales définies (227), le procédé le plus facile pour les interpréter consistera, la réduction des diverses quadratures étant à présent complètement effectuée, à laisser de côté la variable z que nous avions introduite pour cette opération, et à reprendre la variable primitive θ pour lui substituer aussitôt la variable φ définie par les équations (41) et (42) du § II ou (74) du Chapitre I, afin de pouvoir utiliser ainsi les interprétations déjà obtenues à l'occasion des résultats précédents.

En effet, ayant alors, d'abord par la définition (209) de z, et l'égalité (215), à la fois

$$(228) \quad \begin{cases} \dfrac{dz}{2\sqrt{Z}} = \dfrac{im}{2} \dfrac{m^2 dz}{im^3 \sqrt{Z}} = \dfrac{im}{2} \dfrac{d\theta}{\Delta\theta}, \\ \dfrac{z\, dz}{2\sqrt{Z}} = \dfrac{i}{m} \dfrac{m^2 z}{2} \dfrac{m^2 dz}{im^3 \sqrt{Z}} = \dfrac{i}{2m} (\varpi + \theta) \dfrac{d\theta}{\Delta\theta}, \end{cases}$$

du moment que $z^{(1)}$ et $z^{(2)}$ sont par définition les limites de z qui correspondent aux limites θ_1 et θ_2 (40) de θ, et $\varphi^{(1)}$ et $\varphi^{(2)}$ celles de φ qui correspondent à ces dernières elles-mêmes, nous aurons donc, en intégrant entre ces limites et rappelant en outre les égalités (45) et (47), (k désignant momentanément un module qui recevra tout à l'heure l'une des déterminations k_1 ou k_2, et non pas la variable indépendante k des intégrales qui font l'objet du

présent Mémoire), pour les susdites quantités (227), respectivement les premières expressions

$$(229)\quad \begin{cases} [Z_0]_{z^{(1)}}^{z^{(2)}} = \dfrac{im}{2}\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\Delta\theta}{d\theta} = \dfrac{im}{2}\int_{\varphi^{(1)}}^{\varphi^{(2)}}\frac{2d\varphi}{i\sqrt{N}} = \frac{m}{\sqrt{N}}(\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}), \\ [Z_1]_{z^{(1)}}^{z^{(2)}} = \dfrac{i}{2m}\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}(\varpi + \theta)\frac{d\theta}{\Delta\theta} = \frac{i}{2m}(-2i)\sqrt{N}\,[Z(\varphi, k)]_{\varphi^{(1)}}^{\varphi^{(2)}} \\ \qquad\qquad = \dfrac{\sqrt{N}}{m}[Z(\varphi^{(2)}, k) - Z(\varphi^{(1)}, k)]; \end{cases}$$

quantités que nous conviendrons de représenter encore par les symboles simplifiés $(Z_0)_1^2$ et $(Z_1)_1^2$.

Et si nous rappelons alors les valeurs (14) du § I qui montrent que pour les deux seules déterminations de ϵ qu'il y ait lieu de considérer, savoir $\epsilon = \epsilon_2 = s_2$ et $\epsilon = \epsilon_4 = t_2$, la valeur de la limite inférieure $\varphi^{(1)}$ est $\varphi^{(1)} = K + iK'$ (avec affectation, aux trois termes de cette égalité, de l'indice 2 ou 4, suivant le cas), et que nous convenions maintenant de désigner désormais par le symbole φ sans indice, ainsi que nous l'avons fait séparément pour chacun de ces deux indices, expressément la différence

$$\varphi = \varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} - (K + iK'),$$

puis que nous fassions également, tout comme dans la formule (58) du § II, pour chaque indice individuellement (*),

$$\Theta = \frac{\mathrm{sn}(\varphi^{(2)}, k)\,\mathrm{dn}(\varphi^{(2)}, k)}{\mathrm{cn}(\varphi^{(2)}, k)},$$

les formules (14) du § I et (55) du § II montrent que les deux

(*) Bien que ce même symbole Θ figure déjà au début du présent paragraphe (p. 94), ainsi qu'à celui des deux précédents [équations (38), (90) et (91)] pour représenter une autre quantité, nous pouvons néanmoins, sans avoir à redouter aucune confusion de notation, l'employer encore pour désigner cette nouvelle quantité, la précédente ne devant plus réapparaître dorénavant dans la suite de ce travail.

expressions précédentes (229) se changeront alors respectivement dans les deux suivantes :

$$(230)\qquad [Z_0]_{z^{(1)}}^{z^{(2)}} = \frac{m}{\sqrt{N}}\varphi, \qquad [Z_1]_{z^{(1)}}^{z^{(2)}} = \frac{\sqrt{N}}{m}[Z(\varphi, k) - \Theta].$$

Observons enfin que l'écriture de ces deux dernières expressions pourra être simplifiée au moyen de nos notations actuelles, si l'on remarque que la définition (41) du coefficient N donnant, étant rapprochée des valeurs (210) de n^2 et ϵ, et (213) de E″,

$$\begin{aligned} N = \varpi + n^2 + \epsilon &= m^2(1 - g^2) - m^2 + m^2 E \\ &= m^2(E - g^2) = m^2 E'', \end{aligned}$$

d'où

$$(231)\qquad \frac{N}{m^2} = E'', \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{N}}{m} = \sqrt{E''}, \qquad \frac{m}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{E''}},$$

on peut, dès lors, écrire encore les dites expressions (230) :

$$(232)\qquad \begin{cases} (Z_0)_1^2 = [Z_0]_{z^{(1)}}^{z^{(2)}} = \dfrac{\varphi}{\sqrt{E''}}, \\ (Z_1)_1^2 = [Z_1]_{z^{(1)}}^{z^{(2)}} = \sqrt{E''}\,[Z(\varphi, k) - \Theta]. \end{cases}$$

Avant d'introduire ces diverses valeurs dans les deux expressions (225) et (226) de $I^{(n)}$ et $J^{(n)}$, remarquons qu'elles ne diffèrent entre elles que par le coefficient m^2 qui affecte la seconde, les symboles qui caractérisent les fonctions des mêmes variables, et l'indice de ces fonctions qui est plus élevée d'une unité dans la seconde expression que dans la première. Il suffira donc d'effectuer les calculs procédant de la substitution en question pour la première expression seulement, et nous aurons immédiatement le résultat qu'ils auraient fourni pour la seconde en tenant compte, dans celui déjà obtenu, de la simple remarque que nous venons de spécifier.

Cela dit, récrivant d'abord cette première expression (225) sous la forme plus explicite

$$I^{(1)} = 2iM \sum_{\epsilon} \pm \sqrt{E}\,[\,\{\,\mathcal{F}_{n-1}(z^{(2)}, E)\,\sqrt{Z^{(2)}} - \mathcal{F}_{n-1}(z^{(1)}, E)\,\sqrt{Z^{(1)}}\,\} + E'E''f_{n-1}(E)\,(Z_0)_1^2 + f_n(E)\,(Z_1)_1^2\,],$$

et y introduisant alors les valeurs ci-dessus (232), ainsi que celle $Z^{(1)} = 0$ reconnue plus haut (pp. 101-102), on voit qu'elle deviendra

$$I^{(1)} = 2iM \sum_{\epsilon} \pm \sqrt{E}\,[\mathcal{F}_{n-1}(z^{(2)}, E)\,\sqrt{Z^{(2)}} + \sqrt{E''}\,\{\,E'f_{n-1}(E)\,\varphi + f_n(E)\,(Z(\varphi, k) - \Theta)\,\}\,],$$

ou bien, si l'on observe qu'eu égard aux valeurs précédentes (231), le produit $\sqrt{E}\sqrt{E''}$ peut être écrit, avec le symbole $\overline{E}$ (48),

$$\sqrt{E}\sqrt{E''} = \frac{\sqrt{E}\sqrt{N}}{m} = \frac{\sqrt{EN}}{m} = \frac{\overline{E}}{m}, \tag{233}$$

et qu'on représente ensuite par le symbole Δ'_ϵ l'ensemble (abstraction faite du facteur constant iM) des termes algébriques (en x et k) pour chaque détermination de ϵ, savoir

$$\Delta'_\epsilon = \sqrt{E}\,\mathcal{F}_{n-1}(z^{(2)}, E)\,\sqrt{Z^{(2)}} - \frac{\overline{E}}{m} f_n(E)\,\Theta, \tag{234}$$

cette même expression pourra s'écrire alors, en premier lieu, sous forme condensée,

$$I^{(n)} = 2iM \sum_{\epsilon} \pm \left[\Delta'_\epsilon + \frac{\overline{E}}{m}\left(E' f_{n-1}(E)\,\varphi + f_n(E)\,Z(\varphi, k)\right)\right],$$

puis en second lieu explicitement, en ayant égard aux valeurs nulles (52) de $\overline{S_1}$ et $\overline{T_1}$, ainsi qu'aux valeurs (208) de E_2 et E_4,

$$\left\{\begin{aligned} I^{(n)} = 2iM\Big[&-\left\{\Delta'_2 + \frac{\overline{S_2}}{m}\left(E'_2 f_{n-1}(x^2)\,\varphi_2 + f_n(x^2)\,Z(\varphi_2, k_2)\right)\right\} \\ &+\left\{\Delta'_4 + \frac{\overline{T_2}}{m}\left(E'_4 f_{n-1}(g^2-k^2)\,\varphi_1 + f_n(g^2-k^2)\,Z(\varphi_1, k_1)\right)\right\}\Big], \end{aligned}\right. \tag{235}$$

E'_2 ou E'_4, et Δ'_2 ou Δ'_4 étant respectivement ce que deviennent les quantités E' (213) et Δ'_ϵ (234) pour $E = E_2$ ou $E = E_4$, c'est-à-dire en fait pour $\epsilon = \epsilon_2 = s_2$ ou $\epsilon = \epsilon_4 = t_2$.

En tenant compte de la remarque faite plus haut (p. 104) sur la complète similitude de forme des deux expressions (225) et (226), il est évident dès lors, que la seconde deviendrait par le même calcul

$$(236)\quad \left\{\begin{aligned} J^{(n)} = 2iMm^2 \Big[&-\left\{\Delta''_2 + \frac{\overline{S_2}}{m}\Big(E'_2\psi_n(x^2)\,\varphi_2 + \psi_{n+1}(x^2)\,Z(\varphi_2, k_2(\Big)\right\} \\ &+\left\{\Delta''_4 + \frac{\overline{T_2}}{m}\Big(E'_4\psi_n(g^2-k^2)\,\varphi_1 + \psi_{n+1}(g^2-k^2)Z(\varphi_1,k_1)\Big)\right\}\Big], \end{aligned}\right.$$

en posant cette fois à la place de la définition (234) celle-ci :

$$(237)\qquad \Delta''_\epsilon = \sqrt{\overline{E}}\,\Psi_n(z^{(2)}, E)\sqrt{Z^{(2)}} - \frac{\overline{E}}{m}\psi_{n+1}(E)\,\Theta,$$

et Δ''_2 ou Δ''_4 étant de nouveau respectivement ce que devient cette quantité Δ''_ϵ pour $\epsilon = \epsilon_2 = s_2$ ou $\epsilon = \epsilon_4 = t_2$.

Reste donc à présent seulement à déterminer, pour les remettre dans les expressions ainsi obtenues, les valeurs tant de la limite supérieure $z^{(2)}$ et du radical correspondant $\sqrt{Z^{(2)}}$ que des deux quantités E'_2 et E'_4.

A cet effet, quant à la première, tout d'abord, de la définition de la variable z, savoir $m^2 z = \varpi + \theta$, déduisant en général, pour la limite supérieure $z^{(2)}$, la valeur

$$m^2 z^{(2)} = \varpi + \theta_2 = \varpi + (\epsilon + \eta_2 - f),$$

nous trouverons donc ainsi, en distinguant les deux cas correspondant aux deux déterminations de ϵ seules considérées,

$$\epsilon = \epsilon_2 = s_2, \qquad m^2 z_2^{(2)} = \varpi + (s_2 + t_2 - f),$$

$$\epsilon = \epsilon_4 = t_2, \qquad m^2 z_4^{(2)} = \varpi + (t_2 + s_2 - f),$$

c'est-à-dire qu'on aura $z_2^{(2)} = z_4^{(2)} = z^{(2)}$, la valeur de la quantité $z^{(2)}$ étant alors, eu égard aux expressions (1), (207) et (210),

$$m^2 z^{(2)} = m^2(1-g^2) + [m^2x^2 + m^2(g^2-k^2) - m^2] = m^2(x^2-k^2),$$

et, par conséquent, l'on aura en définitive :

$$z_2^{(2)} = z_4^{(2)} = z^{(2)} = x^2 - k^2. \tag{238}$$

Cela posé, les valeurs (208) de E_2 et E_4, jointes aux définitions (213) de E' et E'', donnant respectivement dans chacun des deux cas

$$(239)\quad \begin{cases} \mathsf{E}_2 = x^2 & \begin{cases} \mathsf{E}'_2 = \mathsf{E}_2 + g'^2 = x^2 + g'^2, \\ \mathsf{E}''_2 = \mathsf{E}_2 - g^2 = x^2 - g^2, \end{cases} \\ \mathsf{E}_4 = g^2 - k^2 & \begin{cases} \mathsf{E}'_4 = \mathsf{E}_4 + g'^2 = (g^2-k^2) + (1-g^2) = 1-k^2, \\ \mathsf{E}''_4 = \mathsf{E}_4 - g^2 = (g^2-k^2) - g^2 = -k^2, \end{cases} \end{cases}$$

nous aurons donc de même, eu égard à la définition (214) du trinôme Z, en distinguant encore les deux cas,

$$(240)\quad \begin{cases} (\mathrm{Z}^{(2)})_2 = z^{(2)}(z^{(2)} - \mathsf{E}'_2)(z^{(2)} - \mathsf{E}''_2) \\ \qquad = (x^2-k^2)[(x^2-k^2) - (x^2+g'^2)][(x^2-k^2) - (x^2-g^2)] \\ \qquad = (x^2-k^2)[-(g'^2+k^2)](g^2-k^2) \\ \qquad = (k^2-x^2).(g^2-k^2)(g'^2+k^2) = (k^2-x^2)\,\mathrm{K}, \\ (\mathrm{Z}^{(2)})_4 = z^{(2)}(z^{(2)} - \mathsf{E}'_4)(z^{(2)} - \mathsf{E}''_4) \\ \qquad = (x^2-k^2)[(x^2-k^2) - (1-k^2)][(x^2-k^2) - (-k^2)] \\ \qquad = (x^2-k^2)[-(1-x^2)]\,x^2 = x^2.(1-x^2)(k^2-x^2) = x^2\mathrm{X}, \end{cases}$$

d'où par conséquent, en définitive, quant aux radicaux en question :

$$\sqrt{(\mathrm{Z}^{(2)})_2} = \sqrt{k^2-x^2}\,\sqrt{\mathrm{K}}, \qquad \text{et} \qquad \sqrt{(\mathrm{Z}^{(2)})_4} = x\sqrt{\mathrm{X}}. \tag{241}$$

Ces valeurs (238), (239) et (241) étant acquises, les expressions des quatre termes algébriques que nous avons dénotés, pour abréger par Δ'_2, Δ'_4; Δ''_2, Δ''_4 et qui nous restaient seuls à calculer,

seront dès lors, eu égard aux définitions (234) et (237) de Δ'_ϵ et Δ''_ϵ, respectivement les suivantes :

$$(242)\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \Delta'_2 = \sqrt{S_2}\,\mathcal{F}_{n-1}(x^2-k^2, x^2)\sqrt{k^2-x^2}\sqrt{K} - \dfrac{\overline{S_2}}{m} f_n(x^2)\,\Theta_2, \\ \Delta'_4 = \sqrt{T_2}\,\mathcal{F}_{n-1}(x^2-k^2, g^2-k^2)\,x\sqrt{X} - \dfrac{\overline{T_2}}{m} f_n(g^2-k^2)\,\Theta_1; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \Delta''_2 = \sqrt{S_2}\,\Psi_n(x^2-k^2, x^2)\sqrt{k^2-x^2}\sqrt{K} - \dfrac{\overline{S_2}}{m}\psi_{n+1}(x^2)\,\Theta_2, \\ \Delta''_4 = \sqrt{T_2}\,\Psi_n(x^2-k^2, g^2-k^2)\,x\sqrt{X} - \dfrac{\overline{T_2}}{m}\psi_{n+1}(g^2-k^2)\,\Theta_1. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ayant ainsi calculé successivement tous les termes des développements (235) et (236) qui représentent l'une des expressions de chacune des intégrales doubles proposées $I^{(n)}$ (203) et $J^{(n)}$ (204), occupons-nous maintenant de l'autre expression, à savoir celle que nous obtiendrons en y remplaçant séparément les variables s et t par les variables x et k, substitution qui, en rappelant, outre l'égalité (60) pour les deux types, celle (5) pour le premier type, ainsi que les définitions (109) de λ et μ, et observant qu'on peut alors écrire

$$\begin{aligned} &(2n+3)(s+t-f)+2\varpi \\ &= (2n+3)(s+t+\varpi-f)-(2n+1)\varpi \\ &= (2n+3)m^2(x^2-k^2)-(2n+1)m^2g'^2 \\ &= (2n+3)m^2\left[(x^2-k^2)-\frac{2n+1}{2n+3}g'^2\right] \\ &= (2n+3)m^2\left[x^2-\left(k^2+\frac{2n+1}{2n+3}g'^2\right)\right] \\ &= (2n+3)m^2(x^2-\rho), \end{aligned}$$

en représentant par ρ la nouvelle fonction linéaire de k^2

$$\rho = k^2 + \frac{2n+1}{2n+3}g'^2,$$

transformera très simplement la première des dites intégrales doubles tout d'abord dans la suivante :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}^{(n)} &= \int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2} 2\left[(2n+3)(s+t-f)+2\varpi\right](s+t+\varpi-f)^n \times \\
&\qquad \frac{1}{4}\,\frac{s-t}{\sqrt{s+t+\varpi-f}}\,\frac{ds}{\sqrt{\mathrm{S}}}\,\frac{dt}{\sqrt{\mathrm{T}}} \\
&= \int_{g}^{k}\int_{0}^{x} 2(2n+3)\,m^2(x^2-\rho).\left[m^2(x^2-k^2)\right]^n.\,im\,(x^2-\lambda)\,\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}\,\frac{k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}} \\
&= im^{2n+3}\int_{g}^{k}\int_{0}^{x}(2n+3)\,(x^2-k^2)^n.\,(x^2-\rho)\,(x^2-\lambda)\,\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}\,\frac{2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}} \\
&= im^{2n+3}\int_{g}^{k}\int_{0}^{x}(2n+3)\,(x^2-k^2)^n.\left[x^4-(\lambda+\rho)\,x^2+\lambda\rho\right]\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}\,\frac{2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}}.
\end{aligned}$$

Semblablement, la même transformation conduira, pour le second type (236), en rappelant l'égalité (108) et la définition (111). de ν, à l'autre forme analogue à la précédente :

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}^{(n)} &= \int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2}(s+t+\varpi-f)^n\,\frac{1}{2}\,\frac{(s-t)\left[2st-m^2(s+t-f)\right]}{\sqrt{s+t+\varpi-f}}\,\frac{ds}{\sqrt{\mathrm{S}}}\,\frac{dt}{\sqrt{\mathrm{T}}} \\
&= \int_{g}^{k}\int_{0}^{x}\left[m^2(x^2-k^2)\right]^n.\,im^5\left[(\lambda-\mu)\,x^4+\nu x^2-\lambda\mu\right]\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}\,\frac{2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}}.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire, qu'en introduisant de nouveau la notation simplifiée (217), ces deux expressions seront devenues respectivement

$$(243)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{I}^{(n)} &= i\mathrm{M}m^2\int_{g}^{k}\int_{0}^{x}\mathrm{F}(x^2,k^2)\,\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}\,\frac{2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}} \\
&= i\mathrm{M}m^2\int_{g}^{k}\left(\int_{0}^{x}\mathrm{F}(x^2,k^2)\,\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}\right)\frac{2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}}, \\
\mathrm{J}^{(n)} &= i\mathrm{M}m^4\int_{g}^{k}\int_{0}^{x}\mathfrak{F}(x^2,k^2)\,\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}\,\frac{2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}} \\
&= i\mathrm{M}m^4\int_{g}^{k}\left(\int_{0}^{x}\mathfrak{F}(x^2,k^2)\,\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}\right)\frac{2k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}},
\end{aligned}\right.$$

en faisant séparément, pour chacun des deux cas :

$$(244)\quad \begin{cases} F(x^2, k^2) = (2n+3)(x^2-k^2)^n \{ x^4 - (\lambda+\rho)x^2 + \lambda\rho \{, \\ \mathcal{F}(x^2, k^2) = (x^2-k^2)^n \{ (\lambda-\mu)x^4 + \nu x^2 - \lambda\mu \{. \end{cases}$$

Occupons-nous donc, en premier lieu, de la première quadrature, en x, dans ces deux expressions.

Pour donner à cette détermination assez délicate toute la clarté qu'elle exige, il nous faut examiner attentivement, et à tour de rôle, la forme du développement de chacun des produits précédents (244).

En convenant de faire dans les deux cas

$$(x^2-k^2)^n = \sum_{j=0}^{j=n} B_j x^{2(n-j)} (-k^2)^j,$$

B_j étant ainsi le coefficient de binôme

$$B_j = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-j+1)}{1.2.3.\ldots\ldots j},$$

la première des définitions précitées (244) donnera, quant au premier cas,

$$\frac{F(x^2, k^2)}{2n+3} = [x^{2n} - nk^2 x^{2(n-1)} + \ldots\ldots + B_{j-2}(-k^2)^{j-2} x^{2(n-j+2)} + B_{j-1}(-k^2)^{j-1} x^{2(n-j+1)} + B_j(-k^2)^j x^{2(n-j)} + \ldots\ldots + (-k^2)^n] \times \{ x^4 - (\lambda+\rho)x^2 + \lambda\rho \{ = \sum_{j=0}^{j=n+2} K_j x^{2(n-j+2)},$$

coefficient K_j du terme général ayant pour expression

$$K_j = B_{j-2}\lambda\rho(-k^2)^{j-2} - B_{j-1}(\lambda+\rho)(-k^2)^{j-1} + B_j(-k^2)^j.$$

Ce qui revient à dire, λ et ρ étant des fonctions linéaires de k^2,

que l'on aura $K_j = f_j(k^2)$, f_j désignant un polynôme du degré j; et le dernier terme du développement, savoir

$$(245)\quad \begin{cases} K_{n+2} = \lambda\rho\,(-k^2)^n = (g^2 - k^2)\left(k^2 + \dfrac{2n+1}{2n+3}\,g'^2\right)(-k^2)^n \\ \qquad = (-1)^{n+1}\,(k^2)^{n+2} + \cdots\cdots \end{cases}$$

obéira donc, lui aussi, à cette loi générale des coefficients.

Dans ce premier cas, le développement pourra donc être écrit, en mettant en évidence, pour plus de clarté, les deux derniers termes,

$$(246)\quad \frac{F(x^2, k^2)}{2n+3} = \sum_{j=0}^{j=n} f_j(k^2)\,x^{2(n+2-j)} + f_{n+1}(k^2).\,x^2 + f_{n+2}(k^2),$$

le degré de chaque polynôme étant marqué par son indice; et tous ces divers polynômes étant entiers par rapport à λ et ρ, tous leurs coefficients seront par conséquent entiers en g^2 ou g'^2.

Notons aussi pour ce premier cas, qu'eu égard à la valeur (245) du dernier terme K_{n+2} de ce développement, la puissance $(k^2)^{n+2}$ dont le coefficient est $(-1)^{n+1}$, existera *toujours* dans le terme en question.

Pour la seconde définition, au contraire, laquelle donnera semblablement

$$(247)\quad \begin{cases} \mathfrak{F}(x^2, k^2) = [x^{2n} - nk^2\,x^{2(n-1)} + \cdots\cdots + B_{j-2}(-k^2)^{j-2}\,x^{2(n-j+2)} \\ \qquad + B_{j-1}(-k^2)^{j-1}\,x^{2(n-j+1)} + B_j(-k^2)^j\,x^{2(n-j)} \\ \qquad\qquad + \cdots\cdots + (-k^2)^n] \times \\ \qquad \{(\lambda - \mu)\,x^4 + \nu x^2 - \lambda\mu\} = \sum_{j=0}^{j=n+2} \mathfrak{K}_j\,x^{2(n+2-j)}, \end{cases}$$

le coefficient $\mathfrak{K}_j$ du terme général, ayant pour expression

$$(247^{bis})\quad \begin{cases} \mathfrak{K}_j = -B_{j-2}\lambda\mu\,(-k^2)^{j-2} + B_{j-1}\nu\,(-k^2)^{j-1} \\ \qquad\qquad + B_j(\lambda - \mu)\,(-k^2)^j, \end{cases}$$

sera de la forme $\mathcal{K}_j = f_{j+1}(k^2)$, l'indice du symbole f_{j+1} marquant encore le degré du polynôme, ainsi qu'il résulte des deux derniers de ces trois termes [la valeur de définition (111) de ν étant du second degré en k^2], mais le premier terme de cette expression de $\mathcal{K}_j$ n'étant que du degré j seulement, le dernier terme du développement en question, savoir

$$(248)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{K}_{n+2} = -\lambda\mu(-k^2)^n = -(g^2-k^2)(g'^2+k^2)(-k^2)^n \\ \qquad = (-1)^n k^{2(n+2)} + \cdots\cdots \end{array} \right.$$

échappera cette fois à la loi du terme général, et l'on aura pour celui-là seul $\mathcal{K}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+2}(k^2)$ [au lieu de $f_{n+3}(k^2)$], en sorte que, dans ce second cas, le développement envisagé s'écrira, en isolant encore les deux derniers termes,

$$(249)\quad \mathcal{F}(x^2, k^2) = \sum_{j=0}^{j=n} f_{j+1}(k^2)\, x^{2(n+2-j)} + f_{n+2}(k^2)\, x^2 + \mathcal{F}_{n+2}(k^2),$$

l'indice marquant toujours le degré de chaque polynôme, et tous leurs coefficients étant, comme tout à l'heure, entiers en λ, μ, ν, c'est-à-dire par conséquent encore en g^2 ou g'^2.

Notons également, pour ce second cas, que le coefficient $\mathcal{K}_{n+1}$ de l'avant-dernier terme du développement (247) sera manifestement, eu égard aux définitions (109) de λ et μ et (111) de ν :

$$(249^{bis})\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{K}_{n+1} = -\lambda\mu.\, n\,(-k^2)^{n-1} + \nu\,(-k^2)^n \\ \qquad = (-k^2)^{n-1}\,\{ - n\lambda\mu + \nu\,(-k^2)\,\{ \\ \qquad = (-k^2)^{n-1}\,[-n\,(g^2-k^2)(g'^2+k^2) \\ \qquad\qquad + \{1 - 2(g^2-k^2)^2\,\{\,(-k^2)\,] \\ \qquad = (-k^2)^{n-1}\,[n\,\{k^4 + \cdots\cdots\{ + \{2k^4 + \cdots\cdots\{\,k^2] \\ \qquad = (-k^2)^{n-1}\,[2(k^2)^3 + \cdots\cdots] \\ \qquad = (-1)^{n+1}.\, 2(k^2)^{n+2} + \cdots\cdots . \end{array} \right.$$

Ces résultats étant donc clairement acquis, nous aurons à présent l'expression de la quadrature en x qui figure dans chacune des valeurs ci-dessus (243) de $I^{(n)}$ et $J^{(n)}$ (à un facteur numérique près pour la première), en multipliant les deux développements précédents (246) et (249) par $\frac{dx}{\sqrt{X}}$ et intégrant de 0 à x; et il est manifeste qu'ils se présenteront alors l'un et l'autre sous la forme d'une fonction linéaire et homogène de quadratures du type

$$X_n = \int_0^x \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{X}}, \tag{250}$$

qu'il faudra ensuite ramener à leurs deux seuls éléments irréductibles X_0 et X_1, accompagnés d'un terme algébrique, ainsi que nous l'avons fait plus haut pour les quadratures Z_n (219).

Occupons-nous donc d'abord de cette réduction.

A cet effet, si nous rappelons les valeurs (62) déjà employées pour le cas le plus simple du même problème, et que nous partions de même à présent, pour le cas général, de l'égalité

$$\begin{aligned}\frac{d(x^m\sqrt{X})}{dx} &= mx^{m-1}\sqrt{X} + x^m\frac{X'}{2\sqrt{X}} = \frac{x^{m-1}}{\sqrt{X}}\left(mX + x.\frac{1}{2}X'\right)\\ &= \frac{x^{m-1}}{\sqrt{X}}\left[m\{k^2-(1+k^2)x^2+x^4\}+x\{-(1+k^2)x+2x^3\}\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{X}}\left[mk^2x^{m-1}-(m+1)(1+k^2)x^{m+1}+(m+2)x^{m+3}\right],\end{aligned}$$

laquelle, étant multipliée par dx et intégrée de 0 à x, ainsi que nous venons de le dire, donnera celle-ci

$$\begin{aligned}x^m\sqrt{X} = mk^2\int_0^x\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{X}} &- (m+1)(1+k^2)\int_0^x\frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{X}}\\ &+ (m+2)\int_0^x\frac{x^{m+3}\,dx}{\sqrt{X}},\end{aligned}$$

en faisant à présent dans cette dernière $m = 2n + 1$, on aura donc la formule de réduction

$$x^{2n+1}\sqrt{\mathrm{X}} = (2n+1)\,k^2\,\mathrm{X}_n - (2n+2)(1+k^2)\,\mathrm{X}_{n+1} + (2n+3)\,\mathrm{X}_{n+2},$$

ou

$$(251)\quad (2n+3)\mathrm{X}_{n+2} = x^{2n}.\,x\sqrt{\mathrm{X}} - (2n+1)k^2\,\mathrm{X}_n + (2n+2)(1+k^2)\,\mathrm{X}_{n+1},$$

laquelle, évidemment, permettra de nouveau, par des substitutions successives, de déterminer de proche en proche toutes les quadratures X_n en fonction linéaire des deux premières X_0 et X_1, et d'un terme algébrique de la forme $\mathcal{F}(x^2, k^2)\,x\sqrt{\mathrm{X}}$, la fonction $\mathcal{F}$ étant entière en x^2 et k^2.

Un point seulement doit retenir encore, pour un instant, notre attention, en raison de l'importance de ses conséquences pour l'étude qui va suivre, à savoir le degré en x^2 et k^2, tant de la dite fonction $\mathcal{F}$, que des coefficients des seules quadratures restantes X_0 et X_1, dans l'expression demandée de la quadrature à réduire X_{n+2}.

Pour cela, remarquant que la formule précédente (251) deviendra à chaque fois, si l'on y fait successivement $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$,

$$(252)\quad \left\{\begin{array}{lll} n = 0, & 3\mathrm{X}_2 = & x\sqrt{\mathrm{X}} - k^2\,\mathrm{X}_0 + 2(1+k^2)\,\mathrm{X}_1, \\ n = 1, & 5\mathrm{X}_3 = & x^2.\,x\sqrt{\mathrm{X}} - 3k^2\,\mathrm{X}_1 + 4(1+k^2)\,\mathrm{X}_2, \\ n = 2, & 7\mathrm{X}_4 = & x^4.\,x\sqrt{\mathrm{X}} - 5k^2\,\mathrm{X}_2 + 6(1+k^2)\,\mathrm{X}_3, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right.$$

il est visible alors, les coefficients des deux quantités X_n au second membre de chacune de ces égalités étant des fonctions linéaires de k^2, que lorsqu'on aura remis dans la seconde équation la valeur de X_2 fournie par la première, pour celle de X_3 ainsi obtenue les coefficients de X_0 et X_1 seront entiers et du second degré en k^2, et le coefficient de $x\sqrt{\mathrm{X}}$, ou la fonction $\mathcal{F}$, du premier degré en x^2

et k^2; puis semblablement, qu'en reportant cette dernière valeur elle-même dans la troisième équation, pour la valeur de X_4 qui en résultera, les coefficients de X_0 et X_1 seront des polynômes du troisième degré en k^2, et la fonction $\mathcal{F}$ sera du second degré en x^2 et k^2, et ainsi de suite : c'est-à-dire qu'on arrivera, en fin de compte, pour la quantité demandée X_{n+2}, à une expression de la forme

$$(253) \qquad X_{n+2} = F_n(x^2, k^2)\, x\sqrt{X} + K'_{n+1} X_0 + K''_{n+1} X_1 \text{ (*)},$$

l'indice marquant le degré savoir, en x^2 et k^2 pour le polynôme (à deux variables) F, et en k^2 pour les polynômes (à une seule variable) K′ ou K″.

(*) De même que pour la formule analogue (224), on peut encore établir ce résultat à l'aide du procédé classique consistant à faire voir que, s'il est reconnu exact pour deux valeurs successives n et $(n+1)$ de l'indice n, il sera encore exact pour la valeur suivante $(n+2)$.

En effet, supposons que nous ayons reconnu qu'on a à la fois, pour deux valeurs particulières successives n et $(n+1)$,

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} X_n = F_{n-2}\cdot x\sqrt{X} + K'_{n-1} X_0 + K''_{n-1} X_1, \\ X_{n+1} = F_{n-1}\cdot x\sqrt{X} + K'_n X_0 + K''_n X_1, \end{cases}$$

en écrivant simplement F_n à la place de $F_n(x^2, k^2)$. — La formule de réduction d'où nous sommes partis (251), étant écrite avec la même abréviation, donnera alors

$$(\beta) \qquad \begin{cases} (2n+3) X_{n+2} = x^{2n}\cdot x\sqrt{X} - (2n+1) k^2 \left[F_{n-2}\cdot x\sqrt{X} + K'_{n-1} X_0 + K''_{n-1} X_1\right] \\ \qquad\qquad + (2n+2)(1+k^2)\left[F_{n-1}\cdot x\sqrt{X} + K'_n X_0 + K''_n X_1\right] \\ \qquad\qquad = \mathcal{F}_n\cdot x\sqrt{X} + \mathcal{K}'_{n+1} X_0 + \mathcal{K}''_{n+1} X_1, \end{cases}$$

c'est-à-dire que la formule en question (253) sera encore exacte pour l'indice $(n+2)$.

Or, pour les hypothèses $n=1$ et $n=2$, les deux formules ci-dessus (α) coïncident avec la seconde et la troisième des équations (252) dont l'existence est démontrée, en tant qu'issues, pour les mêmes valeurs particulières de l'indice n, de la formule générale antérieurement établie (251). — Donc l'exactitude de l'expression suivante (β) est bien également assurée par la propriété que nous venons de démontrer.

Au moyen de cette formule de quadrature, d'une part, le premier développement (246) étant traité comme nous l'avons dit plus haut, donnera, quant à l'intégrale en x de l'expression (243) de $I^{(n)}$,

$$(254)\quad \left\{\begin{aligned}\int_0^x \frac{F(x^2,k^2)}{2n+3}\frac{dx}{\sqrt{X}} &= \sum_{j=0}^{j=n} f_j(k^2)\,X_{n-j+2} + f_{n+1}(k^2)\,X_1 + f_{n+2}(k^2)\,X_0\\ &= \sum_{j=0}^{j=n} f_j(k^2)\,[F_{n-j}(x^2,k^2)\,x\sqrt{X} + K'_{n-j+1}X_0 + K''_{n-j+1}X_1]\\ &\qquad + f_{n+1}(k^2)\,X_1 + f_{n+2}(k^2)\,X_0\\ &= \sum_{=0}^{j=n} [F_n(x^2,k^2)\,x\sqrt{X} + f_{n+1}(k^2)\,X_0 + \mathcal{F}_{n+1}(k^2)\,X_1]\\ &\qquad + f_{n+1}(k^2)\,X_1 + f_{n+2}(k^2)\,X_0,\end{aligned}\right.$$

et par conséquent en multipliant par $(2n+3)$, on aura, pour la quadrature en question elle-même, un résultat de même forme, c'est-à-dire tel que

$$(255)\quad \left\{\begin{aligned}\int_0^x F(x^2,k^2)\frac{dx}{\sqrt{X}} &= \mathcal{F}_n(x^2,k^2)\,x\sqrt{X} + f_{n+1}(k^2)\,X_1 + f_{n+2}(k^2)\,X_0\\ &= \mathcal{F}_n(x^2,k^2)\,x\sqrt{X} + \Big(\sum_{=0}^{j=n+1} G'_j k^{2j}\Big)X_1 + \Big(\sum_{j=0}^{j=n+2} G''_j k^{2j}\Big)X_0,\end{aligned}\right.$$

les coefficients G'_j et G''_j, ainsi que tous ceux du polynôme $\mathcal{F}_n$ étant encore entiers en g^2 ou g'^2.

Il importe, pour la suite de la recherche, de remarquer que le coefficient G''_{n+2} de la puissance la plus élevée de k^2 qui multiplie X_0, lequel provient manifestement du seul terme correspondant du dernier terme $f_{n+2}(k^2)\,X_0$ du développement précédent (254) et aura dès lors pour expression $G''_{n+2} = (2n+3)(-1)^{n+1}$, d'après la valeur reconnue plus haut (245) pour le coefficient K_{n+2}, *existera* par conséquent *toujours*, quel que soit l'indice positif n.

D'autre part, le second développement (249) donnera par les

mêmes procédés, pour la quadrature analogue de l'expression (243) de $J^{(n)}$,

$$
(256)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\int_0^x \mathcal{F}(x^2,k^2)\frac{dx}{\sqrt{X}} &= \sum_{j=0}^{j=n} f_{j+1}(k^2)\,X_{n-j+2} + f_{n+2}(k^2)\,X_1 + \mathcal{F}_{n+2}(k^2)\,X_0 \\
&= \sum_{j=0}^{j=n} f_{j+1}(k^2)\left[F_{n-j}(x^2,k^2)\,x\sqrt{X} + K'_{n-j+1}\,X_0 + K''_{n-j+1}X_1\right] \\
&\qquad + f_{n+2}(k^2)\,X_1 + \mathcal{F}_{n+2}(k^2)\,X_0 \\
&= \sum_{j=0}^{j=n}\left[\Phi_{n+1}(x^2,k^2)\,x\sqrt{X} + \psi_{n+2}(k^2)\,X_0 + \varpi_{n+2}(k^2)\,X_1\right] \\
&\qquad + f_{n+2}(k^2)\,X_1 + \mathcal{F}_{n+2}(k^2)\,X_0 \\
&= \mathcal{F}_{n+1}(x^2,k^2)\,x\sqrt{X} + f_{n+2}(k^2)\,X_1 + \varphi_{n+2}(k^2)\,X_0 \\
&= \mathcal{F}_{n+1}(x^2,k^2)\,x\sqrt{X} + \left(\sum_{j=0}^{j=n+2}\mathcal{G}'_j\,k^{2j}\right)X_1 + \left(\sum_{j=0}^{j=n+2}\mathcal{G}''_j\,k^{2j}\right)X_0,
\end{aligned}
\right.
$$

les coefficients $\mathcal{G}'_j$ et $\mathcal{G}''_j$ étant toujours [comme ceux G'_j et G''_j de l'expression de la quadrature précédente (255)] entiers par rapport aux constantes g^2 ou g'^2.

Il est important de nouveau d'observer, avant d'aller plus loin, quel sera cette fois le coefficient $\mathcal{G}'_{n+2}$ de la puissance la plus élevée de k^2 qui multiplie X_1. Or, le troisième membre de la suite d'égalités précédentes fait voir qu'il se composera de deux termes, à savoir : d'une part, le coefficient correspondant dans l'avant-dernier terme $f_{n+2}(k^2)\,X_1$ ou $\mathcal{K}_{n+1}\,X_1$, coefficient auquel l'expression (249bis) de la quantité $\mathcal{K}_{n+1} = f_{n+2}(k^2)$ assigne la valeur $(-1)^{n+1}.2$ et, d'autre part, le coefficient correspondant dans le développement $\sum_{j=0}^{j=n} f_{j+1}(k^2)\,K''_{n-j+1}\,X_1$, lequel s'obtiendra évidemment en n'ayant égard qu'à la puissance la plus élevée de k^2 dans chacun des deux facteurs $\mathcal{K}_j = f_{j+1}(k^2)$ (247bis) et K''_{n-j+1}.

Or, cette détermination ainsi précisée est assez facile, comme on va le voir, pour l'un et l'autre facteur.

En effet, quant au premier, si l'on tient compte des définitions des coefficients consécutifs du binôme B_{j-1} et B_j, savoir

$$B_{j-1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-j+3)}{1.2.3.\ldots(j-1)}, \qquad B_j = B_{j-1}\frac{n-j+1}{j},$$

l'expression (247bis) du dit coefficient $\mathcal{K}_j$ du terme général deviendra, en en négligeant le premier terme dont le degré en k^2 est moindre d'une unité que les deux autres,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_j &= \ldots\ldots + B_{j-1}\nu(-k^2)^{j-1} + B_j(\lambda-\mu)(-k^2)^j \\ &= \ldots\ldots + B_{j-1}\nu(-k^2)^{j-1} + B_{j-1}\frac{n-j+1}{j}(\lambda-\mu)(-k^2)^j \\ &= \ldots\ldots + B_{j-1}(-k^2)^{j-1}\left[\nu + \frac{n-j+1}{j}(\lambda-\mu)(-k^2)\right] \\ &= \frac{B_{j-1}}{j}(-k^2)^{j-1}\mathcal{H},\end{aligned}$$

en faisant, pour faciliter les transformations,

$$\mathcal{H}_j = j\nu + (n-j+1)(\lambda-\mu)(-k^2),$$

quantité qui, eu égard aux valeurs (111) de ν et (110) de $\lambda-\mu$, représentera le trinôme du second degré en k^2

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_j &= j\{1-2(g^2-k^2)^2\} + (n-j+1)\{2(g^2-k^2)-1\}(-k^2) \\ &= j\{-2k^4 + \ldots\ldots\} + (n-j+1)\{2k^4 + \ldots\ldots\} \\ &= (n-2j+1)2k^4 + \ldots\ldots,\end{aligned}$$

en sorte que l'expression du coefficient en question sera :

$$(256^{bis}) \quad \begin{cases} \mathcal{K}_j = \dfrac{B_{j-1}}{j}(-k^2)^{j-1}[(n-2j+1)2(k^2)^2 + \ldots\ldots] \\ \qquad = (-1)^{j-1}2(n-2j+1)\dfrac{B_{j-1}}{j}(k^2)^{j+1} + \ldots\ldots \end{cases}$$

D'autre part, quant au second facteur K''_{n-j+1}, lequel représente par définition, ainsi que nous le supposons dans le troisième membre de la suite d'égalités précédentes (256), le coefficient de X_1 dans l'expression de la quadrature X_{n-j+2}, il est clair, en se reportant à la série d'équations (252) ci-dessus, déduites successivement de la formule de réduction précédente (251), que, pour connaître le coefficient de la puissance la plus élevée de k^2 qui multipliera X_1 dans l'expression générale de la quadrature X_n, il suffira de ne considérer dans chacune de ces équations que leurs seuls premier et dernier termes, et de les multiplier alors toutes entre elles. Car, si nous convenons, pour un instant, de représenter par le symbole (X_n) le seul terme de degré le plus élevé en k^2 qui multiplie X_1 dans l'expression de la quadrature X_n, la série d'équations précitée (252) nous fournira alors celle-ci

$$3\,(X_2) = 2k^2\,X_1, \quad 5\,(X_3) = 4k^2\,(X_2), \quad 7\,(X_4) = 6k^2\,(X_3), \quad \ldots\ldots$$

c'est-à-dire, en général,

$$(2n-1)\,(X_n) = 2\,(n-1)\,k^2\,(X_{n-1}),$$

lesquelles donneront, étant multipliées toutes ensemble,

$$3.5.7.\ldots\ldots(2n-1)\,(X_n) = 2.4.6.\ldots\ldots 2\,(n-1).(k^2)^{n-1}\,X_1\,;$$

et, par conséquent, si nous dénotons respectivement par $\mathcal{C}_n$ et C_n les produits des n premiers nombres, pairs d'une part, et impairs de l'autre, soit

$$\mathcal{C}_n = 2.4.6.\ldots\ldots 2n = 2^n.1.2.3.\ldots\ldots n, \qquad C_n = 1.3.5.\ldots\ldots(2n-1),$$

l'égalité que nous venons d'obtenir nous fournira donc les valeurs :

$$(X_n) = \frac{\mathcal{C}_{n-1}}{C_n}\,(k^2)^{n-1}\,X_1 \qquad \text{d'où} \qquad (X_{n-j+2}) = \frac{\mathcal{C}_{n-j+1}}{C_{n-j+2}}\,(k^2)^{n-j+1}\,X_1$$

De cette dernière valeur et de la précédente (256bis), nous conclurons donc celle du produit

$$\mathcal{K}_j K''_{n-j+1} = \left[(-1)^{j-1} 2\,(n-2j+1)\,\frac{B_{j-1}}{j}\,k^{2(j+1)} + \ldots\ldots\right] \frac{\mathcal{C}_{n-j+1}}{C_{n-j+2}}\,k^{2(n-j+} \quad X_1$$

$$= \left[(-1)^{j-1} 2\,(n-2j+1)\,\frac{B_{j-1}\,\mathcal{C}_{n-j+1}}{j.\,C_{n-j+2}}\,k^{2(n+2)} + \ldots\ldots\right] X_1,$$

dans laquelle nous aurons

$$\frac{B_{j-1}\,\mathcal{C}_{n-j+1}}{j.\,C_{n-j+2}} = \frac{n\,(n-1)\,\ldots\ldots\,(n-j+3)}{1.2.3.\ldots\ldots(j-1)}\,\frac{1}{j}\,\frac{2^{n-j+1}.1.2.3.\ldots\ldots(n-j+1)}{1.3.5.\ldots\ldots[2\,(n-j+2)-1]}$$

$$= 2^{n-j+1}\,\frac{n\,(n-1)\,\ldots\ldots\,3.2.1}{[1.2.3.\ldots\ldots(j-1).j].[1.3.5.\ldots\ldots(2n-2j+3)]}$$

$$= 2^{n-j+1}\,\frac{(j+1)\,(j+2)\,\ldots\ldots\,(n-1)\,n}{1.3.5.\ldots\ldots(2n-2j+3)},$$

en sorte que la valeur du produit en question sera définitivement :

$$\mathcal{K}_j K''_{n-j+1} = (-1)^j 2^{n-j+2}(n-2j+1)\,\frac{(j+1)(j+2)\ldots\ldots(n-1)n}{1.3.5.\ldots\ldots(2n-2j+3)}\,k^{2(n+2)}X_1 + \ldots\ldots$$

Par conséquent, en joignant le coefficient de $k^{2(n+2)}X_1$ emprunté à cette dernière valeur à celui correspondant de l'expression (249bis) de $\mathcal{K}_{n+1} = f_{n+2}(k^2)$, on voit ainsi que le coefficient demandé $\mathcal{G}'_{n+2}$ aura pour valeur

(256ter)
$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{G}'_{n+2} = (-1)^{n+1}.2 + \displaystyle\sum_{j=0}^{j=n}(-1)^{j-1}2^{n-j+2}(n-2j+1)\,\frac{(j+1)(j+2)\ldots\ldots(n-1).n}{1.3.5.\ldots\ldots(2n-2j+3)} \\ \quad = -2\left[(-1)^n + \displaystyle\sum_{j=0}^{j=n}(-1)^j\,2^{n-j+1}\,(n-2j+1)\,\frac{(j+1)\,(j+2)\ldots\ldots(n-1)\,n}{1.3.5.\ldots\ldots(2n-2j+3)}\right], \end{array}\right.$$

quantité qu'une discussion trop longue pour pouvoir être reproduite ici montre ne pouvoir être nulle pour aucune valeur entière et positive de n. Nous demandons donc au Lecteur de vouloir bien admettre ce résultat, à savoir que, comme dans l'autre cas le coefficient G''_{n+2}, celui en question actuellement $\mathcal{G}'_{n+2}$ ne sera jamais nul non plus, quel que soit l'indice positif n.

Cette première intégration, en x, étant ainsi effectuée, la seconde intégration, en k, opérée sur ces dernières expressions (255) et (256), donnera pour les quantités $I^{(n)}$ et $J^{(n)}$ (243) elles-mêmes, les valeurs

$$\left\{\begin{aligned} I^{(n)} &= iMm^2 \int_g^k \Big[\mathcal{F}_n(x^2, k^2)\, x \sqrt{X} + \Big(\sum_{j=0}^{j=n+1} G'_j k^{2j} \Big) X_1 \\ &\qquad + \Big(\sum_{j=0}^{j=n+2} G''_j k^{2j} \Big) X_0 \Big] \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} \\ &= iMm^2 \Big[\int_g^k \mathcal{F}_n(x^2, k^2)\, x \sqrt{X} \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} + \int_g^k X_1 \Big(\sum_{j=0}^{j=n+1} G'_j k^{2j} \Big) \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} \\ &\qquad + \int_g^k X_0 \Big(\sum_{j=0}^{j=n+2} G''_j k^{2j} \Big) \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} \Big], \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} J^{(n)} &= iMm^4 \int_g^k \Big[\mathcal{F}_{n+1}(x^2, k^2)\, x \sqrt{X} + \Big(\sum_{j=0}^{j=n+2} \mathcal{G}'_j k^{2j} \Big) X_1 \\ &\qquad + \Big(\sum_{j=0}^{j=n+2} \mathcal{G}''_j k^{2j} \Big) X_0 \Big] \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} \\ &= iMm^4 \Big[\int_g^k \mathcal{F}_{n+1}(x^2, k^2)\, x \sqrt{X} \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} + \int_g^k X_1 \Big(\sum_{j=0}^{j=n+2} \mathcal{G}'_j k^{2j} \Big) \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} \\ &\qquad + \int_g^k X_0 \Big(\sum_{j=0}^{j=n+2} \mathcal{G}''_j k^{2j} \Big) \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} \Big], \end{aligned}\right.$$

lesquelles, en posant pour abréger

$$(257)\quad \begin{cases} \mathcal{K}' = m^2 \int_g^k \mathcal{F}_n\ (x^2, k^2)\, x \sqrt{\mathrm{X}}\, \dfrac{2k\, dk}{\sqrt{\mathrm{K}}}, \\ \mathcal{K}'' = m^2 \int_g^k \mathcal{F}_{n+1}(x^2, k^2)\, x \sqrt{\mathrm{X}}\, \dfrac{2k\, dk}{\sqrt{\mathrm{K}}}, \end{cases}$$

et ayant égard, en outre, aux interprétations (5) des quadratures X_0 et X_1, pourront être écrites aussi bien

$$\begin{cases} \mathrm{I}^{(n)} = i\mathrm{M} \left[\mathcal{K}' + m^2 \left(\sum_{j=0}^{j=n+1} \mathrm{G}'_j \int_g^k \mathrm{F}_1 \left(\frac{x}{k}, k \right) \frac{k^{2j}.\, 2k\, dk}{\sqrt{\mathrm{K}}} \right.\right. \\ \qquad \left.\left. + \sum_{j=0}^{j=n+2} \mathrm{G}''_j \int_g^k \mathrm{F}_2 \left(\frac{x}{k}, k \right) \frac{k^{2j}.\, 2k\, dk}{\sqrt{\mathrm{K}}} \right) \right], \\ \mathrm{J}^{(n)} = i\mathrm{M}m^2 \left[\mathcal{K}'' + m^2 \left(\sum_{j=0}^{j=n+2} \mathcal{G}'_j \int_g^k \mathrm{F}_1 \left(\frac{x}{k}, k \right) \frac{k^{2j}.\, 2k\, dk}{\sqrt{\mathrm{K}}} \right.\right. \\ \qquad \left.\left. + \sum_{j=0}^{j=n+2} \mathcal{G}''_j \int_g^k \mathrm{F}_2 \left(\frac{x}{k}, k \right) \frac{k^{2j}.\, 2k\, dk}{\sqrt{\mathrm{K}}} \right) \right]; \end{cases}$$

c'est-à-dire, simplement en vertu des définitions (138) des I_n et J_n,

$$(258)\quad \begin{cases} \mathrm{I}^{(n)} = i\mathrm{M} \left[\mathcal{K}' + m^2 \left(\sum_{j=0}^{j=n+1} \mathrm{G}'_j\, \mathrm{J}_j + \sum_{j=0}^{j=n+2} \mathrm{G}''_j\, \mathrm{I}_j \right) \right], \\ \mathrm{J}^{(n)} = i\mathrm{M}m^2 \left[\mathcal{K}'' + m^2 \left(\sum_{j=0}^{j=n+2} \mathcal{G}'_j\, \mathrm{J}_j + \sum_{j=0}^{j=n+2} \mathcal{G}''_j\, \mathrm{I}_j \right) \right], \end{cases}$$

valeurs au sujet desquelles nous devons nous rappeler que les coefficients G''_{n+2} de I_{n+2} dans la première, et $\mathcal{G}'_{n+2}$ de J_{n+2} dans la seconde, ne sont jamais nuls quel que soit l'indice positif n, ainsi que nous l'avons montré plus haut (pp. 111 et 121).

Restent donc seulement à calculer les deux quadratures en k, $\mathcal{K}'$ et $\mathcal{K}''$ (257), lesquelles ne diffèrent que par l'indice (ou degré

en x^2 et k^2) du polynôme $\mathcal{F}$ qui figure dans leur élément. Il suffira donc d'effectuer cette détermination pour la première seulement.

A cet effet, récrivant d'abord la première définition (257), en tenant compte de celles (4) de X et K, et de la valeur (67) de S_2, ainsi qu'il suit

$$(259)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{K}' &= m^2 \int_g^k \mathcal{F}_n(x^2, k^2)\, x\sqrt{X}\, \frac{2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}} \\ &= m^2 x\sqrt{1-x^2} \int_g^k \mathcal{F}_n(x^2,k^2)\sqrt{k^2-x^2}\, \frac{2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}} \\ &= \sqrt{S_2} \int_g^k \mathcal{F}_n(x^2, k^2)\, \frac{(k^2-x^2).\,2k\,dk}{\sqrt{(k^2-x^2)(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}} \\ &= \sqrt{S_2} \int_g^k \mathcal{F}_{n+1}(x^2, k^2)\, \frac{2k\,dk}{\sqrt{(k^2-x^2)(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}}, \end{aligned}\right.$$

il est facile de voir que si nous faisons alors $z = x^2 - k^2$, d'une part, les deux autres facteurs sous le radical de l'élément devenant, eu égard aux valeurs (239) de E_2' et E_2'',

$$(260)\quad \left\{\begin{aligned} g^2 - k^2 &= -(x^2-g^2) + (x^2-k^2) = -E_2'' + z, \\ g'^2 + k^2 &= (x^2+g'^2) - (x^2-k^2) = E_2' - z, \end{aligned}\right.$$

le trinôme sous le radical précité deviendra donc ainsi

$$(261)\quad \left\{\begin{aligned} (k^2-x^2)(g^2-k^2)(g'^2+k^2) &= -z(-E_2''+z)(E_2'-z) \\ &= z(z-E_2')(z-E_2'') = Z, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire celui-là même que nous avons appelé Z dans la recherche de la première expression des $I^{(n)}$ et $J^{(n)}$ [formule (214)], mais considéré expressément cette fois pour la détermination $\epsilon = \epsilon_2 = s_2$, ou, ce qui revient au même, pour la détermination $E = E_2 = x^2$; et que, d'autre part, la transformée en z du polynôme $\mathcal{F}_{n+1}(x^2, k^2)$ sera encore un polynôme de degré $(n+1)$ en z

et k^2 : ce qui revient à dire, qu'étant ordonné par rapport aux puissances décroissantes de z, il présentera un développement de la forme

$$\mathfrak{F}_{n+1}(x^2, z) = \mathfrak{X}_0 z^{n+1} + \mathfrak{X}_1 z^n + \cdots + \mathfrak{X}_n z + \mathfrak{X}_{n+1} = \sum_{j=0}^{j=n+1} \mathfrak{X}_j z^{n+1-j},$$

les $\mathfrak{X}_j$ étant encore un polynôme en x^2 dont l'indice marque le degré, et dont les coefficients, comme ceux du polynôme $\mathfrak{F}_{n+1}(x^2, k^2)$ dont ils proviennent, seront également entiers en g^2 ou g'^2.

Il résulte de ces deux remarques que, par la substitution de la variable z à la variable k, l'expression ci-dessus (257) de la quadrature proposée $\mathfrak{K}'$ sera devenue, en ayant égard pour la limite inférieure de z à la valeur (260) de $(g^2 - k^2)$,

$$(262) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{K}' &= \sqrt{S_2} \int_{E_2''}^{z} \left(\sum_{j=0}^{j=n+1} \mathfrak{X}_j z^{n+1-j} \right) \frac{dz}{\sqrt{Z}} \\ &= 2\sqrt{S_2} \sum_{j=0}^{j=n+1} \mathfrak{X}_j \int_{E_2''}^{z} z^{n+1-j} \frac{dz}{2\sqrt{Z}} \\ &= 2\sqrt{S_2} \sum_{j=0}^{j=n+1} \mathfrak{X}_j \left(Z_{n+1-j}\right)_{E_2''}^{z}, \end{aligned} \right.$$

en employant de nouveau le symbole Z_n (219), et entendant toujours que ϵ est remplacé partout par sa détermination $\epsilon_2 = s_2$, ou E par celle correspondante (208), savoir $E_2 = x^2$.

D'ailleurs, avec la même condition, l'expression générale (224) des quadratures Z_n donnera, en y faisant $E = x^2$ et $m = n - 1 - j$,

$$Z_{n+1-j} = \mathfrak{F}_{n-1-j}(z, x^2)\sqrt{Z} + E'E'' f_{n-1-j}(E) Z_0 + f_{n-j}(E) Z_1,$$

valeur qu'on devra, avant de la reporter dans l'expression précédente de $\mathfrak{K}'$, prendre entre les limites E_2'' et $z = x^2 - k^2$. Or,

quant à la première, le radical $\sqrt{Z}$ pour elle est égal à zéro, le trinôme Z (214) contenant, avec l'hypothèse actuelle le facteur $(z - E_2'')$; et la seconde valeur se confondant avec celle (238) que nous avons appelée $z^{(2)}$, lors de la recherche de l'autre expression des quantités $I^{(n)}$ et J^n, la valeur du trinôme sous le radical qui lui correspond sera donc celle (240) que nous avons dénotée alors par le symbole $(Z^{(2)})_2$. En tenant compte de ces deux remarques, l'expression de Z_{n+1-j} qu'il faudra remettre dans celle (262) de $\mathcal{K}'$ sera donc ainsi

$$(Z_{n+1-j})^z_{E_2''} = \mathcal{F}_{n-1-j}(z^{(2)}, x^2)\sqrt{(Z^{(2)})_2} + E_2'E_2'' f_{n-1-j}(x^2)[Z_0]^z_{E_2''} + f_{n-j}(x^2)[Z_1]^z_{E_2''},$$

et dès lors, en opérant la dite substitution, l'on obtiendra évidemment un résultat de la forme :

$$(263)\quad \left|\begin{array}{l} \mathcal{K}' = \sqrt{S_2}\,\Pi_{n-1}(z^{(2)}, x^2)\sqrt{(Z^{(2)})_2} + E_2'E_2''\,\varpi_{n-1}(x_2)[Z_0]^z_{E_2''} \\ \qquad\qquad + \varpi_n(x^2)[Z_1]^z_{E_2''}. \end{array}\right.$$

Or, pour les deux déterminations $\epsilon = \epsilon_2 = s_2$ et $\epsilon = \epsilon_4 = t_2$, les deux intégrales définies $[Z_0]^z_{E_2''}$ et $[Z_1]^z_{E_2''}$ se confondent visiblement avec celles $[Z_0]^{z^{(2)}}_{x^{(1)}}$ et $[Z_1]^{z^{(2)}}_{x^{(1)}}$ dont nous avons signalé l'interprétation (232) lors de la recherche précédente déjà rappelée; attendu que nous avons reconnu, d'une part (p. 102) qu'on avait quelle que soit la détermination de ϵ, $z^{(1)} = E''$; et d'autre part, ainsi que nous l'avons dit tout à l'heure, que la variable z actuelle se confond avec la quantité $z^{(2)} = z_2^{(2)} = z_4^{(2)}$ (238) : ce qui revient à dire que l'on a, en sous-entendant le même indice 2 ou 4 à la fois pour φ, k, E'' et Θ,

$$[Z_0]^z_{E''} = [Z_0]^{z^{(2)}}_{x^{(1)}} = \frac{\varphi}{\sqrt{E''}}, \qquad [Z_1]^z_{E''} = [Z_1]^{z^{(2)}}_{x^{(1)}} = \sqrt{E''}\,[Z(\varphi, k) - \Theta].$$

En prenant donc ces dernières valeurs pour la supposition actuelle $\epsilon = \epsilon_2 = s_2$, et tenant compte en même temps des

valeurs précitées (238) de $z^{(2)}$ et (241) de $\sqrt{(Z^{(2)})_2}$, la valeur précédente (263) de $\mathcal{K}'$ sera donc en définitive

$$(264)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{K}' = \sqrt{S_2}\left[\Pi_{n-1}(x^2-k^2,x^2)\sqrt{k^2-x^2}\sqrt{K}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \sqrt{E_2''}\left\{E_2'\varpi_{n-1}(x^2)\varphi_2 + \varpi_n(x^2)\Big(Z(\varphi_2,k_2)-\Theta_2\Big)\right\}\right] \\ \qquad = \nabla_2' + \dfrac{\sqrt{S_2}}{m}\Big(E_2'\varpi_{n-1}(x^2)\varphi_2 + \varpi_n(x^2)Z(\varphi_2,k_2)\Big), \end{array}\right.$$

en appliquant à la détermination actuelle $\epsilon = \epsilon_2 = s_2$ la formule (233), et désignant encore, comme alors, par le symbole ∇_2' l'ensemble des termes algébriques en x et k, savoir

$$(265)\quad \nabla_2' = \sqrt{S_2}\,\Pi_{n-1}(x^2-k^2,x^2)\sqrt{k^2-x^2}\sqrt{K} - \frac{\sqrt{S_2}}{m}\varpi_n(x^2)\Theta_2;$$

et dès lors, d'après la remarque faite plus haut (p. 123), il est clair, qu'en changeant simplement n en $(n+1)$, ainsi que les symboles des diverses fonctions, l'expression de l'autre quadrature analogue $\mathcal{K}''$ (257) sera pareillement

$$(266)\quad \mathcal{K}'' = \nabla_2'' + \frac{\sqrt{S_2}}{m}\Big(E_2' f_n(x^2)\varphi_2 + f_{n+1}(x^2)Z(\varphi_2,k_2)\Big),$$

le symbole ∇_2'' désignant cette fois la quantité :

$$(267)\quad \Delta_2'' = \sqrt{S_2}\,\mathcal{F}_n(x^2-k^2,x^2)\sqrt{k^2-x^2}\sqrt{K} - \frac{\sqrt{S_2}}{m} f_{n+1}(x^2)\Theta_2.$$

Ayant donc ainsi de nouveau calculé successivement tous les termes de la seconde expression de nos intégrales doubles proposées $I^{(n)}$ et $J^{(n)}$, nous n'aurons plus maintenant, pour entrer en possession des formules cherchées, qu'à égaler encore à celle précédemment trouvée (235) ou (236) pour la même quantité, celle (258) obtenue en second lieu, dans lesquelles les symboles

$\mathfrak{K}'$ et $\mathfrak{K}''$ devront alors être considérés comme tenant lieu des quantités précédentes (264) et (266), et dans celles-ci elles-mêmes les divers symboles Δ ou ∇ comme tenant lieu (en ayant égard aux indices et aux accents) des quantités (242), et (265) et (267) : ce qui nous conduira ainsi aux deux égalités

$$
\left\{
\begin{aligned}
&iM\left[\left\{\nabla'_2+\frac{\overline{S_2}}{m}\left(E'_2\,\varpi_{n-1}(x^2)\,\varphi_2+\varpi_n(x^2)\,Z(\varphi_2,k_2)\right)\right\}\right.\\
&\qquad\left.+m^2\left(\sum_{j=0}^{j=n+1}G'_j\,J_j+\sum_{j=0}^{j=n+2}G''_j\,I_j\right)\right]\\
&=2iM\left[-\left\{\Delta'_2+\frac{\overline{S_2}}{m}\left(E'_2 f_{n-1}(x^2)\,\varphi_2+f_n(x^2)\,Z(\varphi_2,k_2)\right)\right\}\right.\\
&\qquad\left.+\left\{\Delta'_4+\frac{\overline{T_2}}{m}\left(E'_4 f_{n-1}(g^2-k^2)\,\varphi_1+f_n(g^2-k^2)\,Z(\varphi_1,k_1)\right)\right\}\right],
\end{aligned}
\right. \tag{268}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&iMm^2\left[\nabla''_2+\frac{\overline{S_2}}{m}\left(E'_2 f_n(x^2)\,\varphi_2+f_{n+1}(x^2)\,Z(\varphi_2,k_2)\right)\right.\\
&\qquad\left.+m^2\left(\sum_{j=0}^{j=n+2}\mathcal{G}'_j J_j+\sum_{j=0}^{j=n+2}\mathcal{G}''_j\,I_j\right)\right.\\
&=2iMm^2\left[-\left\{\Delta''_2+\frac{\overline{S_2}}{m}\left(E'_2\,\psi_n(x^2)\,\varphi_2+\psi_{n+1}(x^2)\,Z(\varphi_2,k_2)\right)\right\}\right.\\
&\qquad\left.\left.+\left\{\Delta''_4+\frac{\overline{T_2}}{m}\left(E'_4\,\psi_n(g^2-k^2)\,\varphi_1+\psi_{n+1}(g^2-k^2)\,Z(\varphi_1,k_1)\right)\right\}\right];
\end{aligned}
\right. \tag{269}
$$

formules que nous récrirons en les divisant respectivement par les facteurs constants iMm^2 et iMm^4, et réunissant entre eux, dans les seconds membres, les divers polynômes de même variable et de même degré, et dans ce but introduisant les nouvelles notations, indépendantes par définition les unes des autres (*), avec

(*) Nous entendons par là que, dans ces égalités (270), les symboles qui en forment les seconds membres ne représentent pas par hypothèse les mêmes fonctions que celles figurées par les mêmes symboles dans les premiers membres.

affectation d'un même indice qui sera $n-1$, n, ou $n+1$ pour tous les termes d'une même égalité,

$$(270)\quad \begin{cases} \varpi + 2f = \mathcal{J}, & 2f\,(g^2 - k^2) = f(k^2), \\ f + 2\psi = \mathrm{F}, & 2\psi\,(g^2 - k^2) = f(k^2), \end{cases}$$

puis, posant enfin

$$(271)\qquad \nabla_2' + 2\Delta_2' = \overline{\Delta_2'}, \qquad \nabla_2'' + 2\Delta_2'' = \overline{\Delta_2''},$$

ce qui nous donnera ainsi les deux nouvelles formules

$$(272)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{j=0}^{j=n+1} \mathrm{G}_j' \mathrm{J}_j + \sum_{j=0}^{j=n+2} \mathrm{G}_j'' \mathrm{I}_j = \frac{1}{m^2}\left(-\overline{\Delta_2'} + 2\Delta_4'\right) \\ &\qquad - \frac{\overline{\mathrm{S}_2}}{m^3}\left(\mathrm{E}_2' \mathcal{F}_{n-1}(x^2)\,\varphi_2 + \mathcal{F}_n(x^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_2, k_2)\right) \\ &\qquad + \frac{\overline{\mathrm{T}_2}}{m^3}\left(\mathrm{E}_4' f_{n-1}(k^2)\,\varphi_1 + f_n(k^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_1, k_1)\right), \end{aligned} \right.$$

$$(273)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{j=0}^{j=n+2} \mathcal{G}_j' \mathrm{J}_j + \sum_{j=0}^{j=n+2} \mathcal{G}_j'' \mathrm{I}_j = \frac{1}{m^2}\left(-\overline{\Delta_2''} + 2\Delta_4''\right) \\ &\qquad - \frac{\overline{\mathrm{S}_2}}{m^3}\left(\mathrm{E}_2' \mathrm{F}_n(x^2)\,\varphi_2 + \mathrm{F}_{n+1}(x^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_2, k_2)\right) \\ &\qquad + \frac{\overline{\mathrm{T}_2}}{m^3}\left(\mathrm{E}_4' f_n(k^2)\,\varphi_1 + f_{n+1}(k^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_1, k_1)\right), \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles il ne reste plus qu'à déterminer les parties algébriques représentées par les premiers termes du second membre de chaque formule, dont il suffira encore, à cause de leur complète analogie, de calculer le premier seulement.

En effet, les expressions des deux quantités Δ_2' (242) et ∇_2' (265) étant exactement de la même forme, il est clair que la dite forme sera encore celle de la somme $\nabla_2' + 2\Delta_2' = \overline{\Delta_2'}$, en sorte, qu'en faisant de nouveau, outre les conditions précédentes (270) et avec la même interprétation,

$$\Pi_{n-1} + 2\mathcal{F}_{n-1} = \Phi_{n-1} \qquad \text{et} \qquad \varpi_n + 2f_n = \mathcal{J}_n,$$

cette quantité $\overline{\Delta_2'}$ représentera alors une expression telle que

$$(274) \qquad \overline{\Delta_2'} = \sqrt{\overline{S_2}}\,\Phi_{n-1}(x^2-k^2, x^2)\sqrt{k^2-x^2}\,\sqrt{K} - \frac{\overline{S_2}}{m}\,\mathcal{F}_n(x^2)\,\Theta_2,$$

et que, par une raison toute semblable, la somme analogue $\overline{\Delta_2''}$ (271) se présentera de même sous la forme :

$$(275) \qquad \overline{\Delta_2''} = \sqrt{\overline{S_2}}\,\Phi_n(x^2-k^2, x^2)\sqrt{k^2-x^2}\,\sqrt{K} - \frac{\overline{S_2}}{m}\,\mathcal{F}_{n+1}(x^2)\,\Theta_2.$$

Cela étant, les valeurs (67) de S_2 et (129) du produit $\overline{S_2}\,\Theta_2$ donneront, pour la première de ces deux quantités, l'expression :

$$\begin{aligned}\overline{\Delta_2'} = {} & m^2 x\sqrt{1-x^2}.\,\Phi_{n-1}(x^2-k^2, x^2).\, i\sqrt{x^2-k^2}\,\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)} \\ & - \mathcal{F}_n(x^2).\, im^2 x\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{x^2-k^2}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}} \\ = {} & im^2 x\,[\Phi_{n-1}(x^2-k^2, x^2)(g'^2+k^2) - \mathcal{F}_n(x^2)] \\ & \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{x^2-k^2}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}} \\ = {} & im^2 x.\,\Phi_n(x^2, k^2)\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{x^2-k^2}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+g^2}}.\end{aligned}$$

De même, en tenant compte de la valeur (3) de $T_2 = T$ [puisque, d'après les hypothèses (2^{ter}) $t_2 = t$], savoir $T_2 = T = m^4 K$, et de celle (104^{bis}) du produit $\overline{T_2}\Theta_1$, on trouvera pour la quantité Δ_4' (242), l'expression analogue

$$\begin{aligned}\Delta_4' = {} & m^2\sqrt{K}.\,\mathcal{F}_{n-1}(x^2-k^2, g^2-k^2)\,x\sqrt{(1-x^2)(k^2-x^2)} \\ & - f_n(g^2-k^2).\, im^2\sqrt{K}\,\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}} \\ = {} & im^2 x\,[\mathcal{F}_{n-1}(x^2-k^2, g^2-k^2)(1-x^2) - f_n(g^2-k^2)]\sqrt{K}\,\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}} \\ = {} & im^2 x.\,\mathcal{F}_n(x^2, k^2)\,\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}\,;\end{aligned}$$

et partant de là, nous obtiendrons dès lors, pour le premier des deux termes algébriques en question, une expression de la forme

$$(276)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{m^2}(-\overline{\Delta_2'}+2\Delta_4') \\ &= -ix\,\Phi_n(x^2,k^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{x^2-k^2}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}} \\ &\quad +2ix\,\mathcal{F}_n(x^2,k^2)\,\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{g^2-k^2}\sqrt{g'^2+k^2} \\ &= ix\,[-\Phi_n(x^2,k^2)(1-x^2)+2\mathcal{F}_n(x^2,k^2)(g'^2+k^2)]\,\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}} \\ &= ix\,\mathcal{F}_{n+1}(x^2,k^2)\,\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}, \end{aligned}\right.$$

le polynôme $\mathcal{F}_{n+1}(x^2, k^2)$ s'annullant ainsi, comme le montre sa définition, quand on y fait à la fois $x^2 = 1$ et $k^2 = -g'^2$. Et ce premier résultat acquis, la forme de l'expression (275) de Δ_2'' ne différant de celle (274) de Δ_2', tout comme celles (242) de Δ_4'' et Δ_4' ne diffèrent entre elles, qu'en ce que l'indice de chaque polynôme y est plus élevé chaque fois d'une unité dans la première de ces quantités que dans la seconde, il est bien évident que le même calcul donnerait, pour l'autre terme algébrique en question, l'expression de forme semblable à la précédente

$$(277)\quad \frac{1}{m^2}(-\overline{\Delta_2''}+2\Delta_4'') = ix\,\mathcal{F}_{n+2}(x^2,k^2)\,\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\sqrt{g^2+k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}},$$

le nouveau polynôme $\mathcal{F}_{n+2}(x^2, k^2)$ satisfaisant encore par conséquent à la condition $\mathcal{F}_{n+2}(1, -g'^2) = 0$.

Tous les termes des deux équations obtenues plus haut (272) et (273) étant ainsi calculés, on voit, en y remettant les valeurs des deux termes algébriques (276) et (277), en même temps que les expressions (239) de E_2', E_2'', et E_4', E_4'', ainsi que celles (52) de $\overline{S_2}$ et $\overline{T_2}$, que nous aurons ainsi définitivement démontré le Théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Les deux types d'intégrale double*

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{I}^{(n)} &= \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2}(s-t)\,[(2n+3)\,(s+t-f)+2\varpi]\,(s+t+\varpi-f)^{n-\frac{1}{2}}\,\frac{ds}{\sqrt{\mathrm{S}}}\,\frac{dt}{\sqrt{\mathrm{T}}},\\ \mathrm{J}^{(n)} &= \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2}(s-t)\,[2st-m^2\,(s+t-f)]\,(s+t+\varpi-f)^{n-\frac{1}{2}}\,\frac{ds}{\sqrt{\mathrm{S}}}\,\frac{dt}{\sqrt{\mathrm{T}}}, \end{aligned}\right.$$

dans lesquels l'exposant n désigne un nombre entier positif, étant traité par les mêmes procédés qui nous ont déjà conduits aux THÉORÈMES II *et* III, *ou aux équations* (II) *et* (III) (p. 63) *dont ces Théorèmes ne sont qu'une traduction, fourniront de même entre les quantités proposées* I_n, J_n *les deux équations linéaires, dont tous les coefficients constants, dans l'un et l'autre membre, sont des polynômes en* g^2 *ou* g'^2,

$$(\mathrm{I}^{(n)})\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{j=n+1}\mathrm{G}'_j\mathrm{J}_j+\sum_{j=0}^{j=n+2}\mathrm{G}''_j\mathrm{I}_j = i\Big[x\,\mathcal{F}_{n+1}(x^2,k^2)\,\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}\\ &\quad+x\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{g^2-x^2}\,\{(x^2+g'^2)\,\mathcal{F}_{n-1}(x^2)\,\varphi_2+\mathcal{F}_n(x^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_2,k_2)\}\\ &\quad-k\sqrt{g^2-k^2}\,\sqrt{g'^2+k^2}\,\{(1-k^2)\,f_{n-1}(k^2)\,\varphi_1+f_n(k^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_1,k_1)\}\Big], \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{J}^{(n)})\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{j=n+2}\mathcal{G}'_j\,\mathrm{J}_j+\sum_{j=0}^{j=n+2}\mathcal{G}''_j\,\mathrm{I}_j = i\Big[x\,\mathcal{F}_{n+2}(x^2,k^2)\,\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}\\ &\quad+x\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{g^2-x^2}\,\{(x^2+g'^2)\,\mathrm{F}_n(x^2)\,\varphi_2+\mathrm{F}_{n+1}(x^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_2,k_2)\}\\ &\quad-k\sqrt{g^2-k^2}\,\sqrt{g'^2-k^2}\,\{(1-k^2)\,f_n(k^2)\,\varphi_1+f_{n+1}(k^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_1,k_1)\}\Big], \end{aligned}\right.$$

équations dans lesquelles tous les symboles de fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{f}$, F, f *et* f, *désignent des polynômes (à deux ou une variable) dont le degré maximum est marqué par l'indice de ces symboles, et où les deux polynômes* $\mathcal{F}$ *en particulier satisfont l'un et l'autre à la condition* $\mathcal{F}(1,-g'^2)=0$.

On peut observer, à titre de contrôle, que les équations (II) et (IV) d'une part, et (III) et (V) d'autre part (pp. 63 et 66), fournies, comme on l'a vu, respectivement par les intégrales doubles $I^{(0)}$ (37) et $I^{(1)}$ (140), puis $J^{(0)}$ (87) et $J^{(1)}$ (141), sont bien effectivement chacune de la forme indiquée par le Théorème que nous venons de démontrer.

Il importe également, avant d'examiner quel usage nous pouvons faire de ce même Théorème, de noter, au sujet des formes comparées des deux équations ($I^{(n)}$) et ($J^{(n)}$), les trois remarques suivantes :

1° Quant aux seconds membres, qu'ils seront exactement du même type dans les deux équations, en changeant simplement n en $(n+1)$ dans la première de ces équations.

2° Que ce type, considéré pour l'équation $I^{(2)}$, est également celui que le Théorème IV antéprécédent assigne aux expressions des neuf premières inconnues I_0, J_0, ..., I_4, sauf que celles-ci contiennent en plus linéairement le terme

$$g' \{ \Pi(\varphi_2, h_2, k_2) - \Pi(\varphi_1, h_1, k_1) \} = g'(\Pi_2 - \Pi_1).$$

3° Quant aux premiers membres, que l'inconnue J_{n+2} ne figure pas dans la première équation, tandis qu'elle entrera toujours, au contraire, dans la seconde, en sorte que si l'on suppose écrits à la suite les uns des autres, pour toutes les valeurs entières de n à partir de $n = 1$ inclus, tous les systèmes de deux équations du type formulé par le dit Théorème V précédent, chaque équation successive en particulier introduira *une seule* inconnue nouvelle, qui sera tantôt I, tantôt J (abstraction faite de l'indice), ce qui permettra par conséquent, les neuf premières inconnues étant connues par le Théorème IV, de déterminer de proche en proche toute la série des autres, pour toutes les valeurs positives de l'exposant ou indice n.

A cet effet, remettant d'abord dans l'équation ($J^{(2)}$) l'expression des neuf premières inconnues, savoir I_0, J_0, ..., I_4 procurées par le Théorème IV, et tenant compte des remarques 1° et 2° précédentes, cette même équation nous fournira alors pour la deuxième inconnue J_4 qu'elle contient seule en plus, et dont la présence y est certaine (p. 121), une valeur de même forme que son second membre avec addition d'un terme tel que $\mu g'(\Pi_2 - \Pi_1)$, le coefficient μ, ainsi que tous les autres coefficients de l'expression en

question, étant maintenant simplement rationnels en g^2 ou g'^2, et l'on voit que les divers polynômes qui y entreront seront figurés par de nouveaux symboles tels que

$$\mathcal{F}_4(x^2, k^2), \qquad F_2(x^2), \qquad F_3(x^2), \qquad f_2(k^2), \qquad f_3(k^2),$$

dont le premier (celui du terme algébrique) satisfera encore, comme dans les Théorèmes IV et V, à la condition $\mathcal{F}_4(1, -g'^2) = 0$.

Cela fait, remettant alors les dix valeurs actuellement acquises I_0, J_0, ..., I_4, J_4, dans l'équation $(I^{(3)})$ procurée par le même Théorème V, en remarquant que ces valeurs sont de nouveau exactement de même forme que son second membre sauf encore l'addition d'un terme tel que $\nu g'(\Pi_2 - \Pi_1)$, cette même équation nous fournira semblablement pour la onzième inconnue I_5, dont le coefficient est certainement différent de zéro (p. 116), une valeur de même forme que son second membre avec addition du terme $\rho g'(\Pi_2 - \Pi_1)$, le coefficient ρ ainsi que tous les autres étant encore rationnels en g^2 ou g'^2, et les divers polynômes étant figurés par de nouveaux symboles tels que

$$\mathcal{F}_4(x^2, k^2), \qquad \mathcal{F}_2(x^2), \qquad \mathcal{F}_3(x^2), \qquad f_2(k^2), \qquad f_3(k^2),$$

dont le premier satisfait encore à la condition $\mathcal{F}_4(1, -g'^2) = 0$; et ainsi de suite, en répétant indéfiniment dans le même ordre la succession des opérations que nous venons d'indiquer dans ces deux derniers alinéas.

En général, les valeurs des $(2n + 1)$ premières inconnues I_0, J_0, ..., J_{n-1}, I_n étant acquises, et de même forme que le second membre de l'équation $(I^{(n-2)})$ sauf addition d'un terme tel que $\sigma g'(\Pi_2 - \Pi_1)$, en les remettant dans l'équation $(J^{(n-2)})$ et tenant compte de la remarque 1°, celle-ci fournira pour la $(2n + 2)^{me}$ inconnue J_n, dont le coefficient est certainement différent de zéro, une valeur de même forme que son second membre avec addition du terme $\tau g'(\Pi_2 - \Pi_1)$, les divers polynômes qui y entreront étant figurés respectivement par les symboles

$$\mathcal{F}_n(x^2, k^2), \qquad F_{n-2}(x^2), \qquad F_{n-1}(x^2), \qquad f_{n-2}(k^2), \qquad f_{n-1}(k^2),$$

puis ces valeurs des $(2n + 2)$ premières inconnues I_0, J_0, ..., J_n étant ainsi obtenues, en les reportant de même dans l'équation suivante $(J^{(n-1)})$, celle-ci fournira alors, pour la valeur de la

$(2n+3)^{me}$ inconnue I_{n+1}, dont la présence y est également certaine, une expression de même forme que son second membre avec addition du terme $\chi g'(\Pi_2 - \Pi_1)$, c'est-à-dire dans laquelle les divers polynômes seront à nouveau figurés par des symboles tels que

$$\mathcal{F}_n(x^2, k^2), \qquad \mathcal{F}_{n-2}(x^2), \qquad \mathcal{F}_{n-1}(x^2), \qquad f_{n-2}(k^2), \qquad f_{n-1}(k^2),$$

tous les coefficients, y compris ces derniers τ et χ, étant encore dans les deux cas rationnels en g^2 ou g'^2, et les deux seuls polynômes à deux variables, à savoir ceux des termes algébriques, satisfaisant l'un et l'autre à une condition de la forme $\mathcal{F}(1, -g'^2) = 0$.

Comme résumé de ce paragraphe, nous avons donc ainsi démontré rigoureusement le nouveau Théorème suivant, lequel constitue la généralisation du Théorème IV antéprécédent que nous nous étions proposé d'établir.

THÉORÈME VI. — *A partir de la valeur* $n = 3$ *incluse, les deux inconnues consécutives* J_n *et* I_{n+1} *ont, chacune séparément, une expression de la forme*

$$(278)\quad \left\{\begin{matrix} J_n \\ I_{n+1} \end{matrix}\right\} = i\Big[x\,\mathcal{F}_n(x^2, k^2)\,\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}$$
$$+ x\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{g^2-x^2}\,\{(x^2+g'^2)\,F_{n-2}(x^2)\,\varphi_2 + F_{n-1}(x^2)\,Z(\varphi_2, k_2)\}$$
$$- k\sqrt{g^2-k^2}\,\sqrt{g'^2+k^2}\,\{(1-k^2)\,f_{n-2}(k^2)\,\varphi_1 + f_{n-1}(k^2)\,Z(\varphi_1, k_1)\}$$
$$+ Gg'\{\Pi(\varphi_2, h_2, k_2) - \Pi(\varphi_1, h_1, k_1)\}\Big],$$

tous les coefficients des divers polynômes (à deux ou une variable) dont l'indice marque le degré maximum, étant ainsi que le dernier coefficient G, *rationnels en* g^2 *ou* g'^2, *et le polynôme* $\mathcal{F}_n(x^2, k^2)$ *du terme algébrique étant astreint à vérifier la condition* $\mathcal{F}_n(1, -g'^2) = 0$.

VI

Nous aurions désiré avoir la liberté d'établir de même rigoureusement, dans ce dernier paragraphe, les résultats aussi nets, sinon aussi simples, auxquels nous ont conduit les mêmes procédés, convenablement étendus ou modifiés, pour les expressions des quantités à indice négatif I_n, J_n (138).

Mais l'espace parcimonieusement restreint dont nous disposons ne nous permet pas d'entrer, si peu que ce soit, dans cette voie, et tout ce que nous pouvons faire quant à ce sujet est de nous borner à l'indication pure et simple de ces résultats, en la faisant précéder encore toutefois de celle de notre nouveau point de départ et des énoncés des propositions intermédiaires qui, comme les Théorèmes IV et V dans le cas déjà traité de l'indice positif, nous ont permis d'arriver à la proposition homologue, pour ce nouveau cas, du Théorème VI que nous venons d'établir.

Le point de départ en question sera donc pour nous, cette fois, au lieu des intégrales doubles $I^{(n)}$ (203) et $J^{(n)}$ (204), les deux suivantes

$$(279)\quad \mathfrak{I}^{(n)} = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2}(s-t)\,st\,(st+m^2\varpi)^n\,(s+t+\varpi-f)^{-n-\frac{1}{2}}\,\frac{ds}{\sqrt{S}}\,\frac{dt}{\sqrt{T}},$$

$$(280)\quad \mathfrak{J}^{(n)} = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2}(s-t)\,(st+m^2\varpi)^n\,(s+t+\varpi-f)^{-n-\frac{1}{2}}\,\frac{ds}{\sqrt{S}}\,\frac{dt}{\sqrt{T}},$$

dans lesquelles l'exposant n désigne toujours par hypothèse un nombre entier *positif,* et qui ne diffèrent d'ailleurs entre elles que par l'intervention, dans l'élément de la première, du facteur simple *st.*

Il est nécessaire, pour compléter cette définition, de remarquer à leur sujet qu'il n'y a plus lieu, quant à elles, d'y attribuer à l'exposant n la valeur zéro comme point de départ de la série, ainsi que nous l'avions fait pour les types précédents $I^{(n)}$, $J^{(n)}$ (203) et (204), attendu que cette hypothèse donnant

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{J}^{(0)} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{(s-t)\,st}{\sqrt{s+t+\varpi-f}}\,\frac{ds}{\sqrt{S}}\,\frac{dt}{\sqrt{T}}, \\ \mathfrak{J}^{(0)} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{s-t}{\sqrt{s+t+\varpi-f}}\,\frac{ds}{\sqrt{S}}\,\frac{dt}{\sqrt{T}}, \end{array}\right.$$

on reconnaît alors sans peine, en se reportant aux définitions (37) et (87) des quantités $I^{(0)}$ et $J^{(0)}$, et à celle (28) du Chapitre I pour l'intégrale double $I^{(\varpi)}$ qui est celle (6) ou (9) que nous avons appelée I dans le présent travail, que l'on aurait

$$\mathfrak{J}^{(0)} = \frac{1}{2}\left[J^{(0)} + \frac{1}{3}\,m^2\,(I^{(0)} - 4\varpi I)\right], \qquad \mathfrak{J}^{(0)} = 2I,$$

en sorte que ces deux premières intégrales doubles n'étant pas distinctes essentiellement des types précédents $I^{(n)}$, $J^{(n)}$, ne pourraient, dès lors, introduire aucun élément nouveau.

Pour la valeur suivante $n = 1$ de l'exposant n, des deux quantités correspondantes $\mathfrak{J}^{(1)}$ et $\mathfrak{J}^{(1)}$, nous avons déjà mentionné la première (142), et indiqué l'équation (VI) (p. 66) qu'elle fournit entre les inconnues I_n et J_n, lesquelles dans ce premier cas particulier sont donc encore toutes à indice positif.

Quant à la seconde, étant traitée par les mêmes procédés, ou d'autres tout à fait analogues à ceux dont nous nous sommes servis pour les deux intégrales doubles $I^{(0)}$ et $J^{(0)}$ (§§ II et III ci-dessus), elle nous fournira le Théorème suivant, qui jouera dans notre nouvelle recherche relative aux indices négatifs, conjointement avec les Théorèmes IV et VI précédents, le rôle du dit Théorème IV dans la première relative aux indices positifs :

THÉORÈME VII. — *Si l'on désigne par h_2' un nouveau paramètre défini, à l'instar des précédents h_1 et h_2, par l'équation*

$$\text{sn}\,(h_2', k_2) = \frac{ig'}{g}\,\frac{\sqrt{x^2-g^2}}{\sqrt{x^2+g'^2}}, \tag{281}$$

l'intégrale double $\mathfrak{Z}^{(1)}$, étant traitée comme nous l'avons dit, fournira, entre les premières quantités I_n, J_n à indice positif ou négatif, l'équation linéaire

$$\left\{\begin{aligned} &[g^2g'^2\,J_{-1} - 2(g'^2-g^2)\,J_0 - 3J_1] + [(g'^2-g^2)\,I_0 + 2I_1] \\ &= 2i\left[x\,[(1-x^2)+(g'^2+k^2)]\,\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}\right. \\ &\quad + x\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{g^2-x^2}\,\}\,\varphi_2 - Z(\varphi_2,k_2)\,\} \\ &\quad \left. + \frac{1}{k}\sqrt{g^2-k^2}\,\sqrt{g'^2+k^2}\,\}\,(1-k^2)\,\varphi_1 + k^2\,Z(\varphi_1,k_1)\,\}\right] \\ &\quad - gg'\sqrt{1-x^2}\,\Pi(\varphi_2, h_2', k_2), \end{aligned}\right. \tag{282}$$

de laquelle, en tenant compte du Théorème IV, et après réductions faites, on conclura par conséquent, pour la première inconnue à indice négatif J_{-1}, une expression de la forme (toujours avec la même signification des indices)

$$\left\{\begin{aligned} J_{-1} &= i\left[x\,F_3(x^2,k^2)\,\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}\right. \\ &\quad + x\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{g^2-x^2}\,\}\,f_2(x^2)\,\varphi_2 + \mathcal{F}_2(x^2)\,Z(\varphi_2,k_2)\,\} \\ &\quad - \frac{1}{k}\sqrt{g^2-k^2}\,\sqrt{g'^2+k^2}\,\}\,(1-k^2)\,f_2(k^2)\,\varphi_1 + \mathfrak{F}_3(k^2)\,Z(\varphi_1,k_1)\,\} \\ &\quad + \mu g'\,\}\,\Pi(\varphi_2,h_2,k_2) - \Pi(\varphi_1,h_1,k_1)\,\} \\ &\quad \left. + \nu gg'\sqrt{1-x^2}\,\Pi(\varphi_2,h_2',k_2)\right], \end{aligned}\right. \tag{283}$$

tous les coefficients, y compris μ et ν, étant encore rationnels en g^2 ou g'^2, et le polynôme à deux variables $F_3(x^2,k^2)$ vérifiant encore la condition $F_3(1,-g'^2)=0$.

Puis, cela fait, à l'aide d'une généralisation ou extension convenable des procédés employés pour les deux types $I^{(n)}$, $J^{(n)}$, nous établissons semblablement cet autre Théorème, homologue dans la recherche actuelle du Théorème V dans la précédente :

THÉORÈME VIII. — *Les mêmes définitions étant maintenues, les deux types d'intégrale double*

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{J}^{(n)} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2} (s-t)\,st\,(st+m^2\varpi)^n\,(s+t+\varpi-f)^{-n-\frac{1}{2}}\,\frac{ds}{\sqrt{S}}\,\frac{dt}{\sqrt{T}}, \\ \mathfrak{J}^{(n)} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2} (s-t)\,(st+m^2\varpi)^n\,(s+t+\varpi-f)^{-n-\frac{1}{2}}\,\frac{ds}{\sqrt{S}}\,\frac{dt}{\sqrt{T}}, \end{array}\right.$$

dans lesquels l'exposant n désigne un nombre entier positif, étant traités comme nous venons de dire, fourniront entre les inconnues I_n, J_n, *à indices tant positifs que négatifs, respectivement les deux équations linéaires, dans lesquelles tous les coefficients qui y figurent, soit implicitement, soit explicitement, dans l'un et l'autre membres, sont encore rationnels en* g^2 *ou* g'^2,

$$(\mathfrak{J}^{(n)})\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=-n}^{j=n+2} G'_j J_j + \sum_{j=-(n-1)}^{j=n+3} G''_j I_j \\ = i\left[\dfrac{x\,\mathfrak{F}_{8n+2}(x^2,k^2)}{[x^4(x^2+g'^2)(x^2-g^2)(-k^2)(1-k^2)(x^2-k^2)]^n}\,\dfrac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\dfrac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}\right. \\ + \dfrac{x\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{g^2-x^2}}{[x^4(x^2-g^2)(x^2+g'^2)]^n}\left((x^2+g'^2)f_{5n}(x^2)\,\varphi_2 + f_{5n+1}(x^2)\,Z(\varphi_2,k_2)\right) \\ - \dfrac{k\sqrt{g^2-k^2}\,\sqrt{g'^2+k^2}}{[(-k^2)(1-k^2)]^n}\left((1-k^2)f_{3n}(k^2)\,\varphi_1 + f_{3n+1}(k^2)\,Z(\varphi_1,k_1)\right) \\ + G^{(n)}g'\{\Pi(\varphi_2,h_2,k_2) - \Pi(\varphi_1,h_1,k_1)\} \\ \left. + gg'\sqrt{1-x^2}\,\dfrac{F_{2n}(x^2)}{x^{2(2n-1)}}\,\Pi(\varphi_2,h'_2,k_2)\right] (*); \end{array}\right.$$

$$(\mathfrak{J}^{(n)})\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=-n}^{j=n} \mathfrak{G}'_j\, \mathrm{J}_j + \sum_{j=-(n-1)}^{j=n+1} \mathfrak{G}''_j\, \mathrm{I}_j \\ = i\left[\dfrac{x\,\mathfrak{F}_{8n}(x^2,k^2)}{[x^4(x^2+g'^2)(x^2-g^2)(-k^2)(1-k^2)(x^2-k^2)]^n}\,\dfrac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\dfrac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}\right. \\ + \dfrac{x\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{g^2-x^2}}{[x^4(x^2+g'^2)(x^2-g^2)]^n}\left((x^2+g'^2)f_{5n-2}(x^2)\,\varphi_2 + f_{5n-1}(x^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_2,k_2)\right) \\ - \dfrac{k\sqrt{g^2-k^2}\,\sqrt{g'^2+k^2}}{[(-k^2)(1-k^2)]^n}\left((1-k^2)f_{3n-2}(k^2)\,\varphi_1 + f_{3n-1}(k^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_1,k_1)\right) \\ + \mathfrak{G}^{(n)}g'\,\{\,\Pi(\varphi_2,h_2,k_2) - \Pi(\varphi_1,h_1,k_1)\,\{ \\ \left. + gg'\sqrt{1-x^2}\,\dfrac{\mathfrak{J}_{2n}(x^2)}{x^{2(2n-1)}}\,\Pi(\varphi_2,h'_2,k_2)\right] \quad (*), \end{array}\right.$$

les deux polynômes $\mathfrak{F}(x^2,k^2)$, *des termes algébriques, satisfaisant toujours à une condition de la forme* $\mathfrak{F}(1,-g'^2)=0$.

Note de la page précédente :

(*) La présence dans les seconds membres de ces équations, au dénominateur des termes en φ_2, du facteur double $x^{4n}=(x^{2n})^2$, tandis qu'il n'en existe aucun analogue au dénominateur des termes en φ_1, tient à ce que les premiers comprennent tous ceux provenant d'une intégrale simple en k, homologue des intégrales $\mathfrak{K}'$ et $\mathfrak{K}''$ (257), laquelle ne comprend encore comme celles-ci, et pour les mêmes raisons, aucun terme en φ_1, mais introduit cette fois la nouvelle transcendante $\Pi(\varphi_2,h'_2,k_2)$ qui n'intervenait pas dans les équations fournies par les types $\mathrm{I}^{(n)}$ (203) et $\mathrm{J}^{(n)}$ (204).

(*) Il convient d'observer que la forme d'équation (282), procurée, d'après le Théorème VII par l'intégrale double $\mathfrak{J}^{(1)}$ ne constitue en réalité, nonobstant l'apparence contraire, aucune contradiction ou exception par rapport à celle $(\mathfrak{J}^{(n)})$ indiquée par ce Théorème, car pour faire coïncider *littéralement*, la première avec la seconde prise pour l'hypothèse $n=1$, il suffira de faire dans cette dernière :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{G}''_2=0, \quad \mathfrak{F}_8(x^2,k^2)=2[x^4(x^2-g^2)(x^2+g'^2)(-k^2)(1-k^2)(x^2-k^2)]\times \\ \qquad\qquad [(1-x^2)+(g'^2+k^2)], \\ \qquad f_3(x^2)=2x^4(x^2-g^2), \quad f_4(x^2)=-2x^4(x^2-g^2)(x^2+g'^2), \\ \qquad f_1(k^2)=2(1-k^2), \quad f_2(k^2)=2k^2(1-k^2), \\ \mathfrak{G}^{(1)}=0, \quad \mathfrak{J}_2(x^2)=-2x^2. \end{array}\right.$$

Enfin, prenant encore comme point de départ, tant les expressions (278) des I_n, J_n à indice positif, que celle ci-dessus (283) de J_{-1} et celles (202) de $I_0, J_0, \ldots\ldots, I_4$, tout comme dans la recherche précédente (§ V) nous sommes partis de ces dernières seules pour arriver aux premières (278) des I_n, J_n à indice positif, les deux équations $(\mathfrak{J}^{(2)})$ et $(\mathfrak{J}^{(2)})$, indiquées par le Théorème précédent, nous fourniront alors, étant considérées *simultanément,* les deux inconnues I_{-1} et J_{-2}; puis, ces valeurs étant acquises et jointes aux résultats antérieurs, les deux équations $(\mathfrak{J}^{(3)})$ et $(\mathfrak{J}^{(3)})$ fourniront de même, prises ensemble, par leur moyen, les deux inconnues suivantes I_{-2} et J_{-3}; et ainsi de suite indéfiniment.

En général, le système des deux équations $(\mathfrak{J}^{(n)})$ et $(\mathfrak{J}^{(n)})$ indiquées par le Théorème VIII précédent fournira, par le moyen des résultats antérieurement acquis, l'expression des deux inconnues consécutives $I_{-(n-1)}$ et J_{-n}, et la forme de cette expression sera de nouveau indiquée par le dernier Théorème suivant, homologue pour le cas des indices négatifs du Théorème VI pour le cas des positifs :

THÉORÈME IX. — *A partir de la valeur* $n = 2$ *incluse, les deux inconnues consécutives* $I_{-(n-1)}$, J_{-n} *ont, chacune séparément, une expression de la forme*

$$
\left.\begin{matrix} I_{-(n-1)} \\ J_{-n} \end{matrix}\right\} = i\left[\frac{x\,F_{8n+2}(x^2, k^2)}{[x^4(x^2-g^2)(x^2+g'^2)(-k^2)(1-k^2)(x^2-k^2)]^n} \times \right.
$$

$$
\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}
$$

$$
+ \frac{x\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{g^2-x^2}}{[x^4(x^2-g^2)(x^2+g'^2)]^n}\left((x^2+g'^2)\,f_{5n}(x^2)\,\varphi_2 + f_{5n+1}(x^2)\,Z(\varphi_2, k_2)\right) \tag{284}
$$

$$
- \frac{k\sqrt{g^2-k^2}\,\sqrt{g'^2+k^2}}{[(-k^2)(1-k^2)]^n}\left((1-k^2)\,f_{3n}(k^2)\,\varphi_1 + f_{3n+1}(k^2)\,Z(\varphi_1, k_1)\right)
$$

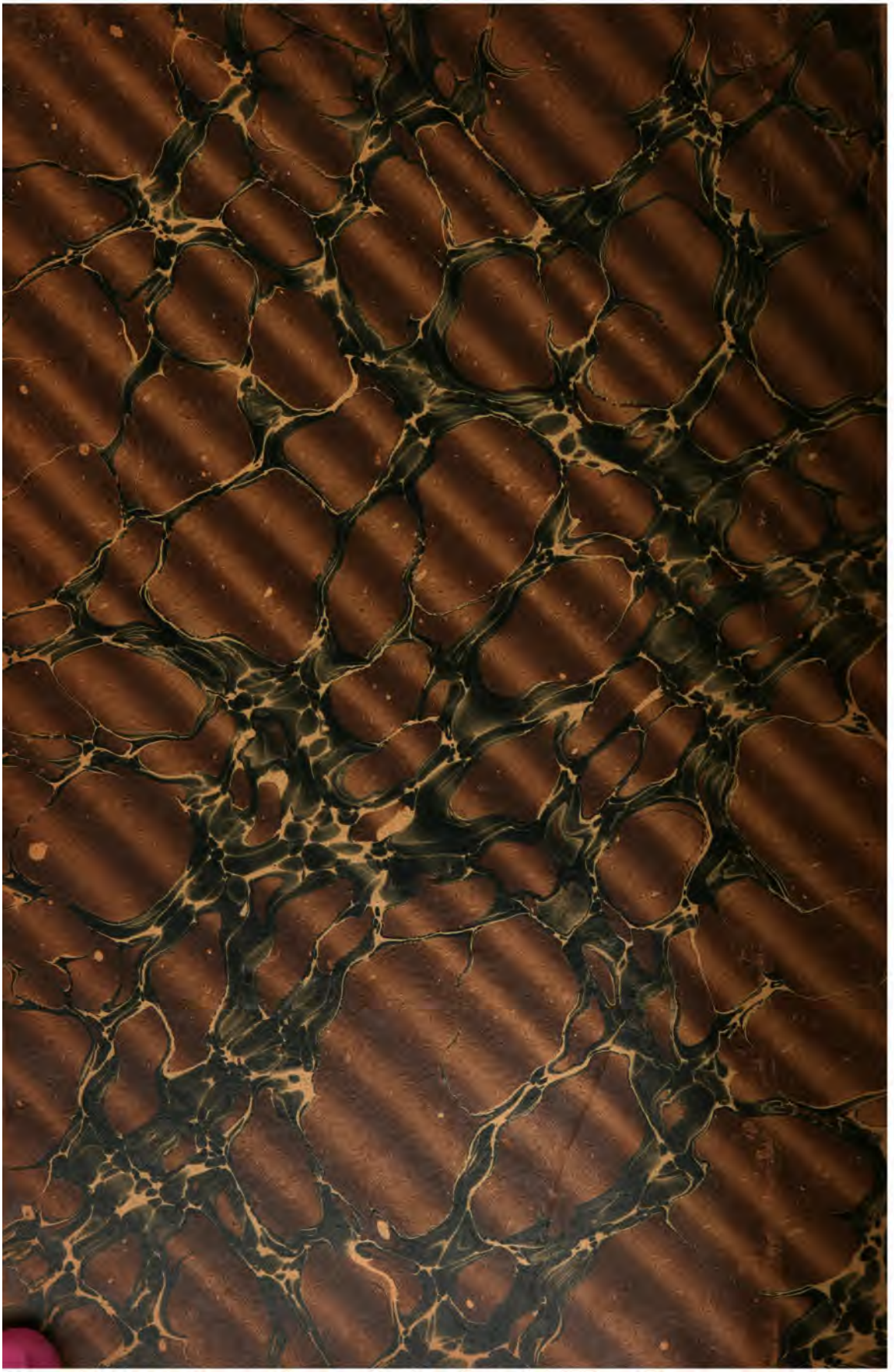
$$
+ Gg'\{\Pi(\varphi_2, h_2, k_2) - \Pi(\varphi_1, h_1, k_1)\{
$$

$$
\left. + gg'\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathfrak{F}_{2n}(x^2)}{x^{2(2n-1)}}\,\Pi(\varphi_2, h_2', k_2)\right],
$$

tous les coefficients des divers polynômes F, *f*, *et* $\mathfrak{F}$, *dont l'indice marque le degré maximum, ainsi que la constante* G, *étant encore rationnels en* g^2 *ou* g'^2, *et le polynôme* $F(x^2, k^2)$ *du terme algébrique vérifiant de nouveau la condition* $F(1, -g'^2) = 0$.

En admettant comme démontrés tous les Théorèmes précédents, on établira très simplement *à posteriori* celui-ci à l'aide du procédé classique consistant à s'assurer que, si l'on admet l'exactitude des expressions en question, seulement pour toutes les valeurs négatives de l'indice des inconnues I et J jusqu'à une certaine valeur particulière que nous désignerons par $-(n-1)$ pour I et par $-n$ pour J, elles seront encore exactes pour les valeurs suivantes de l'indice, $-n$ pour I, et $-(n+1)$ pour J.

En effet, on reconnaît sans peine que, par le moyen des dites expressions, jointes à celle (283) de J_{-1} et à celles (202) et (278) des I_n, J_n à indice positif, le Théorème VIII antéprécédent fournira alors pour les deux inconnues suivantes I_{-n}, $J_{-(n+1)}$, des expressions qui ne différeront de celles proposées (284) que par le changement de n en $n+1$, chaque symbole de fonction étant supposé, bien entendu, désigner alors une fonction nouvelle. Or, ce même type (284) est précisément celui des expressions que l'on obtient pour les deux premières des inconnues actuellement considérées, savoir I_{-1} et J_{-2}, à l'aide du système des deux équations $(\mathfrak{J}^{(2)})$ et $(\mathfrak{J}^{(2)})$, par le calcul que nous avons mentionné tout à l'heure (p. 140) comme première application du Théorème VIII précité. D'où il résulte que l'exactitude des dites expressions (284) se trouve également démontrée pour toutes les valeurs entières et négatives de n, la valeur de l'inconnue I_0 dont l'indice n'est pas négatif étant, bien entendu, excepté.

La considération simultanée des deux expressions successivement obtenues pour une même intégrale double au moyen des deux systèmes différents de variables, employés à plusieurs reprises dans ce Mémoire, et empruntés à notre Chap. I, nous a

donc bien procuré, comme nous l'avions annoncé, l'expression à l'aide, seulement, des mêmes fonctions elliptiques et des mêmes irrationnalités, de toute la classe de quadratures de fonctions elliptiques par rapport au module que nous nous étions proposé d'étudier.